UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Ingeniería en Organización Industrial

Asignatura:

Ingeniería Industrial

Conceptos fundamentales

Índice de Contenidos

1 Introducción 2

2 Tiempo de vida 3

3 Función de fiabilidad 4

4 Vida media 6

5 Tasa de fallo 9

6 Relación entre conceptos 12

7 Observaciones censuradas 13

Conceptos fundamentales

1 Introducción

La gran mayoría de los dispositivos físicos o tangibles sufren un **proceso de degradación** causado por el paso del tiempo y/o por su utilización. También los dispositivos no tangibles, como el software informático, por ejemplo, tienden a mostrar situaciones de fallo (funcionamiento no correcto) con su uso. Ello significa que, a menos que se tomen medidas de mantenimiento eficaces, cualquier dispositivo (componente o sistema) acabará fallando, i.e.: eventualmente, el dispositivo dejará de ser operativo (dejará de realizar correctamente la función que le había sido asignada).

La **fiabilidad de un dispositivo** (componente o sistema), sometido a unas condiciones de trabajo concretas, es la probabilidad de que éste funcione correctamente ("sobreviva" sin fallar) durante un determinado período de tiempo. Así pues, la fiabilidad constituye un aspecto fundamental de la calidad de todo dispositivo. Por tal motivo, resulta especialmente interesante la cuantificación de dicha fiabilidad, de forma que sea posible hacer estimaciones sobre la vida útil del producto. Así, por ejemplo, en el caso de una avioneta monomotor, será de gran conveniencia conocer la probabilidad de que éste falle en diferentes etapas de su vida (tras 500 horas de funcionamiento, tras 800 horas de funcionamiento, etc.). Obtener una buena estimación de la fiabilidad del motor, posibilitará la toma de decisiones racionales acerca de cuándo conviene revisarlo o cambiarlo por otro nuevo.

Muchas de las técnicas que se presentan a lo largo de este módulo, en especial las no paramétricas, fueron inicialmente desarrolladas para su uso en estudios médicos y biológicos (es decir, considerando entidades orgánicas en lugar de dispositivos) bajo el nombre genérico de **análisis de supervivencia** (comparación de diferentes tratamientos médicos, determinación de los factores que intervienen en la supervivencia de los peces de un río, etc.). En la actualidad, sin embargo, la aplicación de dichas técnicas, en especial las paramétricas, se ha extendido a otras áreas como la económica o la industrial bajo el nombre de análisis de tiempos de fallo (establecimiento de períodos de garantía de un producto, diseño de planes de mantenimiento preventivo, etc.).

Hay una característica común a los datos que aparecen en la mayoría de los estudios sobre la fiabilidad de un dispositivo. Se trata del hecho de que contengan **observaciones censuradas**: supongamos que se lleva a cabo una investigación, de duración predeterminada, para analizar la efectividad de un nuevo método de producción de bombillas. La variable de interés en este caso sería el número de días que cada una de las bombillas "sobrevive" (funciona correctamente, sin fallos). A primera vista, parecería sensato utilizar los métodos estadísticos tradicionales (tanto paramétricos como no paramétricos) con objeto de describir el tiempo medio de supervivencia y comparar el nuevo método de producción con los métodos anteriores. Sin embargo, al final de la investigación, es probable que siga habiendo bombillas que funcionen correctamente, y el investigador no será capaz de estimar con precisión cuánto tiempo más permanecerán sin fallar. Para trabajar con este tipo de datos con información parcial no servirán pues los métodos tradicionales, sino que serán necesarias técnicas específicas como las que presentamos en este módulo.

2 Tiempo de vida

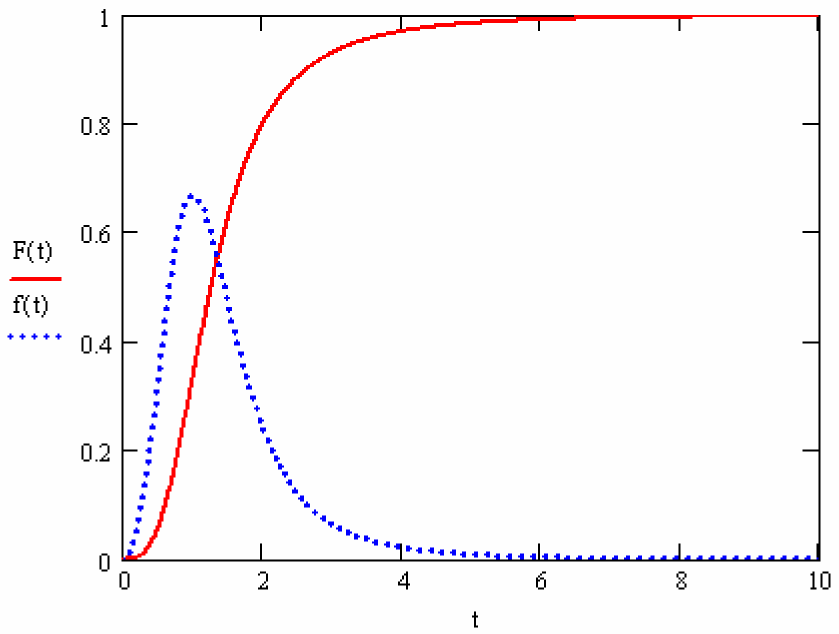
Tiempo hasta el fallo

El **tiempo de vida** o **tiempo hasta el fallo** de un dispositivo (componente o sistema) hace referencia a la longitud del intervalo temporal en que dicho dispositivo está funcionando correctamente, i.e., está operativo y cumpliendo la función para la que fue diseñado.

Este concepto de tiempo hasta el fallo (entendiendo por fallo el suceso causante de que el dispositivo deje de funcionar correctamente), puede representarse mediante una variable aleatoria continua y no negativa T, cuyas funciones de densidad y de distribución se denotarán por $f(t)$ y $F(t)$ respectivamente, por lo que se cumplirá:

$$F(t) = P(T \le t) = \int_0^t f(u)du \qquad f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \qquad P(a \le T \le b) = \int_a^b f(t)dt$$

Habitualmente, se considera $t = 0$ como el instante inicial (instante en que el dispositivo fue puesto en marcha). Observar, sin embargo, que también sería posible usar otras unidades de medida, distintas de las temporales, para representar el uso de un determinado dispositivo (número de ciclos realizados, frecuencia absoluta de uso, número de kilómetros recorridos, etc.).



Notación
Dado $0 < p < 1$, por t_p se denotará al cuantil p de F(t), i.e., t_p será el menor instante temporal t tal que $F(t) = P(T \le t) \ge p$.

3 Función de fiabilidad

Fiabilidad en un instante objetivo
Dado un dispositivo sometido a unas condiciones de trabajo específicas, y dado un

instante temporal $t_0 \geq 0$, se define el concepto de **fiabilidad del dispositivo en el instante-objetivo** t_0, $R(t_0)$, como la probabilidad de que dicho dispositivo siga funcionando correctamente en ese instante, i.e.:

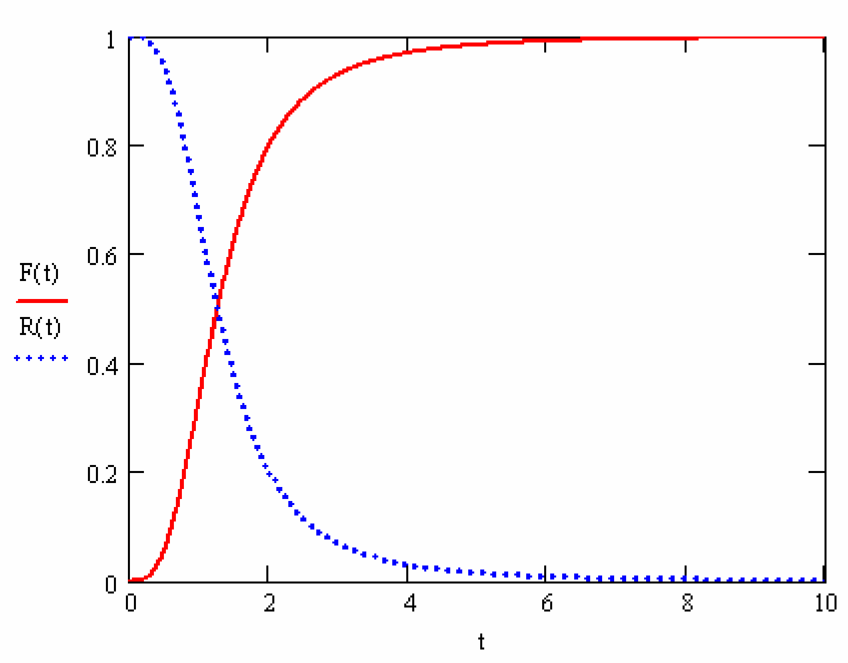
$$R(t_0) = P(T > t_0) = 1 - F(t_0)$$

Función de fiabilidad

A partir de la definición anterior, es posible considerar la **función de fiabilidad** o **función de supervivencia** del dispositivo, $R(t)$, como la función complementaria de $F(t) = P(T \leq t)$, i.e.:

$$\forall t \geq 0, \qquad R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

La función $R(t)$ proporciona la probabilidad de que el dispositivo "sobreviva" al instante t. Observar, asimismo, que esta función determina la proporción de dispositivos iniciales que seguirán funcionando correctamente en el instante t.



Ejemplo 1: Función de fiabilidad

Supongamos que la función de fiabilidad de un determinado producto viene dada por la ecuación:

$$R(t) = \frac{2}{2+t^3}$$

donde t viene expresada en años. Se sabe que dicho producto tiene una garantía de seis meses. Se desea determinar:

a) La probabilidad de que el producto falle durante el período de garantía:

$$P(T \leq 0.5) = 1 - P(T > 0.5) = 1 - R(0.5) = 1 - \frac{2}{2+0.5^3} = 0.0588$$

b) El período de garantía que debería establecer el fabricante para que la probabilidad de que el producto fallase durante dicho período fuese de 0.01 (i.e.: sólo el 1% de las unidades fallarían durante el período de garantía):

Se desea hallar ahora el valor $t_{0.01}$ tal que $P(T \leq t_{0.01}) = 0.01$, i.e.:

$P(T > t_{0.01}) = R(t_{0.01}) = 0.99 = \dfrac{2}{2+t_{0.01}{}^3}$, de donde: $t_{0.01} = \left(\dfrac{2}{0.99} - 2\right)^{1/3} = 0.272$ años

En otras palabras, sería necesario establecer un período de garantía ligeramente superior a los tres meses (0.272 años x 12 meses/año = 3.264 meses) para conseguir que (aproximadamente) sólo un 1% de las unidades fallarían durante el período de garantía.

4 Vida media

Tiempo medio hasta el fallo

Se llama **vida media** o **tiempo medio hasta el fallo** (*Mean Time To Failure*) de un dispositivo a la esperanza de la variable aleatoria T, i.e., la vida media de un dispositivo determina su tiempo de duración esperado:

$$MTTF = E[T] = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt$$

Cuando se consideran políticas de mantenimiento basadas en reparar o sustituir un dispositivo en el momento en que éste falle, se suele hablar de **tiempo medio entre fallos** (MTBF).

Proposición 1. Vida media y área

El tiempo medio hasta el fallo coincide con el área encerrada entre la función $R(t)$ y el semieje horizontal t en el intervalo $[0,\infty)$.

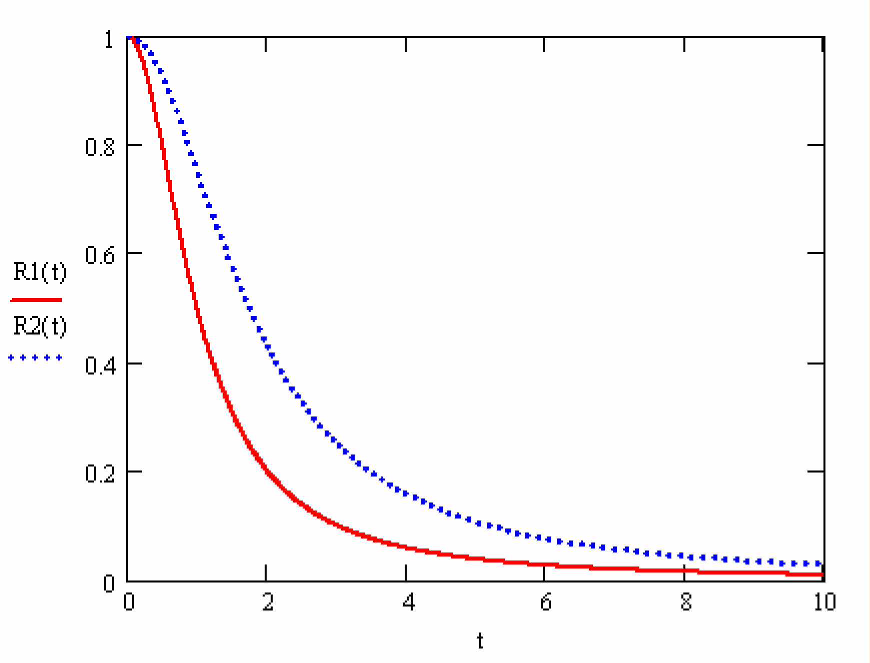
Demostración

En efecto, utilizando el método de integración por partes, y teniendo en cuenta que $t \cdot R(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, se tiene que:

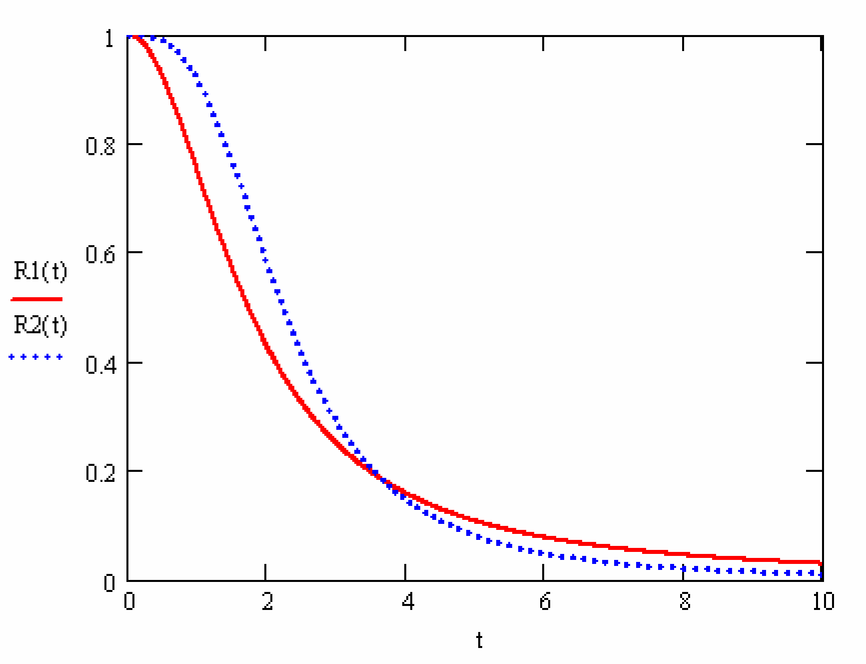
$$\begin{aligned} MTTF &= \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = [t \cdot F(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F(t)dt = [t(1-R(t))]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (1-R(t))dt = \\ &= [t(1-R(t)) - t]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t)dt = [t \cdot R(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Vida media

En la figura siguiente, queda claro que $R_2(t) \geq R_1(t)$, $\forall t \geq 0$. Esto significa que, para cualquier instante-objetivo que consideremos, el dispositivo 2, cuya función de fiabilidad es $R_2(t)$, tendrá una mayor fiabilidad que el dispositivo 1, asociado a $R_1(t)$. Además, el área encerrada por $R_2(t)$ es mayor que la encerrada por $R_1(t)$, lo que significa que el dispositivo 2 tendrá una vida media superior al dispositivo 1.



La figura siguiente representa dos dispositivos con una vida media similar (las áreas encerradas por ambas funciones de fiabilidad son similares). Sin embargo, para valores de t "pequeños" (valores inferiores a 3.5, aproximadamente), el dispositivo 2 se comporta con mayor fiabilidad que el dispositivo 1, mientras que para valores "grandes" de t, ocurre todo lo contrario.



5 Tasa de fallo

Tasa de fallo media

Se define la **tasa de fallo media** en el intervalo (a,b) como:

$$h(a,b)=\frac{R(a)-R(b)}{(b-a)R(a)}$$

Observar que:

$$\frac{R(a)-R(b)}{R(a)}=\frac{P(a<T\leq b)}{P(T>a)}=P(T\leq b\,|\,T>a)$$

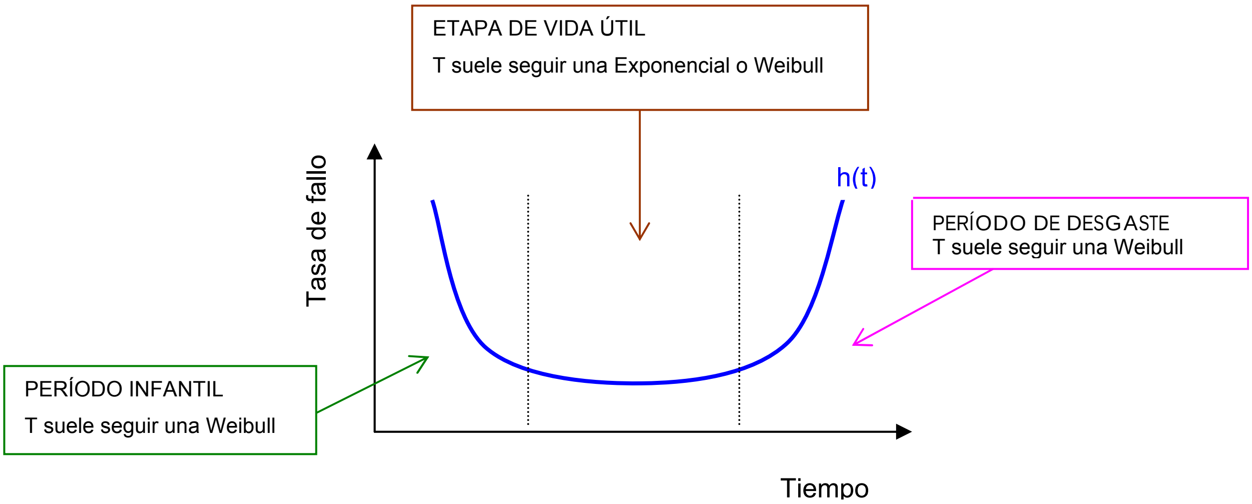
Es decir, la tasa de fallo media en un intervalo (a,b) proporciona la probabilidad condicionada media de que un dispositivo falle en cada uno de los subintervalos unitarios en los que se divide el intervalo (a,b) (entendiendo por subintervalo unitario aquel formado por dos instantes consecutivos).

Tasa de fallo instantánea

A partir de la definición de tasa de fallo media, si se hace tender b hacia a se obtiene la **tasa de fallo** o **tasa de riesgo en el instante** a:

$$h(a)=\lim_{b\to a}\frac{R(a)-R(b)}{(b-a)R(a)}=\frac{-R'(a)}{R(a)}=\frac{F'(a)}{R(a)}=\frac{f(a)}{R(a)}$$

La tasa de fallo (instantánea) puede interpretarse como la “velocidad” a la cual se producen los fallos en el instante a, i.e.: es una medida de lo propenso que resulta el dispositivo a fallar en función de su edad. En la mayoría de los dispositivos se produce un “efecto desgaste” debido al paso del tiempo, por lo que la función tasa de fallo asociada, $h(t)$, suele tener forma de bañera:



En efecto, cuando se inicia la vida de un dispositivo, la tasa de fallo instantánea suele ser relativamente alta (es lo que se denomina "mortalidad infantil"); una vez que el dispositivo entra en una fase más estable, la tasa de fallo suele ser relativamente constante y baja (etapa de "vida útil"); más adelante, tras un tiempo de funcionamiento, la tasa de fallo vuelve a incrementarse ("efecto envejecimiento") hasta que, eventualmente, el dispositivo acabará fallando.

Ejemplo 3: Etapas en la vida de un dispositivo

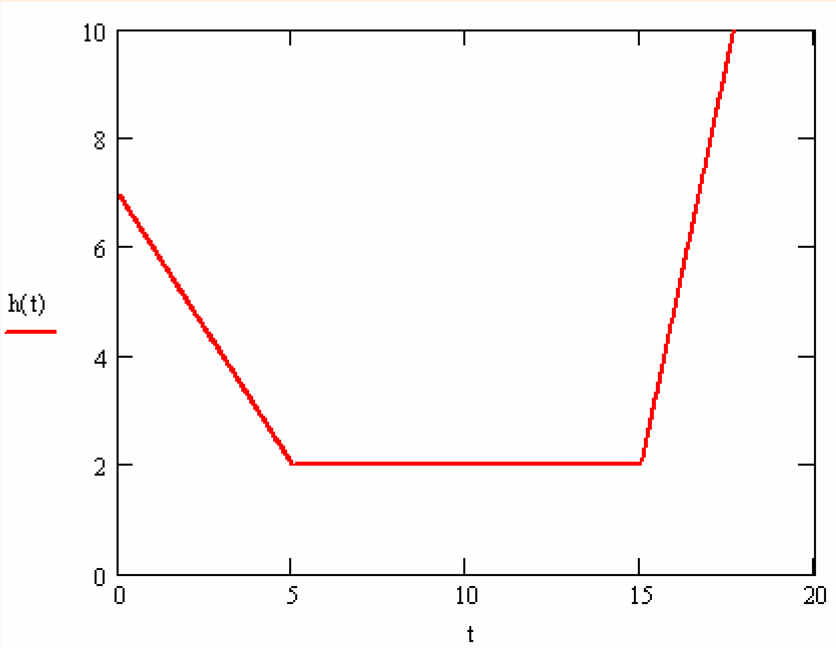
Muchos automóviles nuevos suelen presentar pequeños defectos de funcionamiento al poco de comprarse (elevada tasa de fallos inicial o "mortalidad infantil"). Una vez solventados tales defectos, es de esperar que el vehículo proporcione un largo período de funcionamiento correcto (baja tasa de fallos intermedia o etapa de "vida útil"). Mas tarde, conforme pasan los años, el automóvil se vuelve más propenso a sufrir averías hasta que, finalmente, después de 10 o 15 años, prácticamente todos los vehículos están inservibles (elevada tasa de fallos final o "efecto envejecimiento").

Ejemplo 4: Curva de la bañera

Una familia de funciones tasa de fallo con forma de bañera vendría dada por la expresión parametrizada:

$$h(t) = \begin{cases} \lambda + c_0(t_0 - t) & 0 \le t \le t_0 \\ \lambda & t_0 < t \le t_1 \\ \lambda + c_1(t - t_1) & t > t_1 \end{cases}$$

donde λ, c_0 y c_1 son constantes positivas, y t_0, t_1 son instantes temporales concretos. Para cada valor de los parámetros anteriores obtendríamos una función definida a trozos, siendo cada trozo una expresión lineal. La figura siguiente muestra $h(t)$ para los valores $\lambda = 2$, $c_0 = 1$, $c_1 = 3$, $t_0 = 5$ y $t_1 = 15$:



En principio, cualquier distribución de probabilidad continua que proporcione valores no negativos (exponencial, Weibull, log-normal, k-Erlang, etc.) podría ser usada a la hora de modelar la variable aleatoria T (tiempo hasta el fallo del dispositivo). Desde un punto de vista cualitativo, algunas distribuciones parecen tener más sentido que otras en determinadas circunstancias. Así por ejemplo, al considerar un sistema formado por componentes electrónicos y mecánicos, es altamente probable que sea necesario usar distribuciones distintas para modelar componentes distintos: la propiedad “falta de memoria” de la distribución exponencial (propiedad que se explicará en el próximo capítulo), la convierte en una distribución interesante a la hora de modelar los tiempos de fallo de algunos componentes electrónicos, ya que en este tipo de componentes la tasa de fallo suele ser aproximadamente constante en el tiempo y, por tanto, el suceso fallo puede ocurrir con la misma probabilidad en cualquiera de los intervalos unitarios futuros (caso de no haberse producido todavía); sin embargo, no es posible suponer tasas de fallo constante (modelo exponencial) cuando se trabaja con componentes mecánicos, los cuales se ven considerablemente afectados por el "efecto desgaste", causado por el paso del tiempo, de forma que la tasa de fallo tenderá a incrementarse conforme aumenta el tiempo de vida del componente. Por otra parte, también puede darse el caso de componentes con tasas de fallo decrecientes (al menos en las primeras etapas de su vida, cuando son relativamente nuevos), los cuales también necesitarán una distribución distinta de la exponencial (como la Weibull, la log-normal, la Gamma, etc.) para el modelado de sus tiempos de fallo. En todo caso, será necesario realizar un test estadístico para comprobar la bondad del ajuste del modelo seleccionado para los tiempos de fallo de cada componente.

6 Relación entre conceptos

Conviene establecer claramente las relaciones entre las distintas funciones (conceptos) que se han ido introduciendo hasta el momento:

Proposición 2. Fiabilidad y tasa de fallo

Es posible expresar $R(t)$ como función de $h(t)$ de la siguiente manera:

$$R(t) = \exp\left\{ -\int_0^t h(u)du \right\}$$

Demostración

A partir de la definición de la tasa de fallo (instantánea), se tiene que:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{dF(t)/dt}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} \Rightarrow h(t)dt = -\frac{dR(t)}{R(t)}$$

Tomando integrales en ambas partes:

$$\int_0^t h(u)du = -\int_0^t \frac{dR(u)}{R(u)}du = -\left[\log R(u)\right]_0^t = -\log R(t)$$

de donde:

$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t h(u)du\right\}$$

Así pues, se puede afirmar que tanto $R(t)$ como $F(t) = 1 - R(t)$ vienen unívocamente determinadas por $h(t)$.

La tabla siguiente resume las relaciones entre todas estas funciones.

	$F(t)$	$f(t)$	$R(t)$	$h(t)$
$F(t) =$	$*$	$\int_0^t f(u)du$	$1 - R(t)$	$1 - \exp\left\{-\int_0^t h(u)du\right\}$
$f(t) =$	$\frac{d}{dt}F(t)$	$*$	$-\frac{d}{dt}R(t)$	$h(t)\cdot\exp\left\{-\int_0^t h(u)du\right\}$
$R(t) =$	$1 - F(t)$	$\int_t^\infty f(u)du$	$*$	$\exp\left\{-\int_0^t h(u)du\right\}$
$h(t) =$	$\frac{dF(t)/dt}{1 - F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u)du}$	$-\frac{d}{dt}\ln R(t)$	$*$

7 Observaciones censuradas

Normalmente, los estudios de fiabilidad tienen una duración predeterminada, por lo que no todos los dispositivos analizados habrán fallado a su conclusión. Por tanto, el investigador sabrá que un cierto número de dispositivos han "sobrevivido" durante el período de tiempo que ha durado el test, pero desconocerá el momento exacto en que hubieran fallado si el estudio se hubiese prolongado de forma indefinida.

Observaciones censuradas

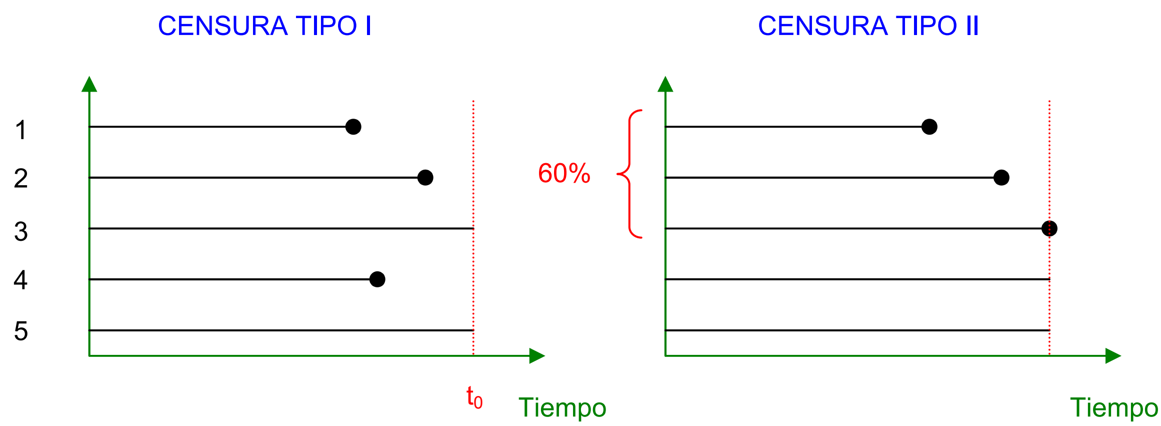
En Teoría de la Fiabilidad (o Supervivencia), se denominan **observaciones censuradas** aquellas que sólo aportan información parcial sobre la vida (tiempo hasta el fallo) de la entidad considerada.

Censura por tiempo (tipo I) y censura por fallos (tipo II)

Las observaciones de **censura por tiempo** o **de tipo I** aparecen al finalizar un test de duración predeterminada: de los dispositivos “supervivientes” sólo se sabe que no han fallado hasta ese momento. En este caso, el tiempo de duración del test es fijo, mientras que el número de productos que fallan es una variable aleatoria.

Por contra, las observaciones de **censura por fallos** o **de tipo II** aparecen cuando el test continúa hasta que una proporción predeterminada de dispositivos hayan fallado. Ahora, el número de productos que fallan es fijo, siendo el tiempo de duración del test una variable aleatoria.

En los gráficos siguientes se muestran los dos tipos de censura: en el primero, el experimento termina cuando se llega al instante t_0 ; en el segundo, el experimento termina cuando falla un determinado porcentaje de dispositivos, en este caso el 60% (3 de los 5):



El símbolo ● denota un fallo observado

Censura a derecha, censura a izquierda y censura por intervalos

Supóngase que en $t = 0$ se inicia un experimento para estudiar la fiabilidad de un conjunto de dispositivos.

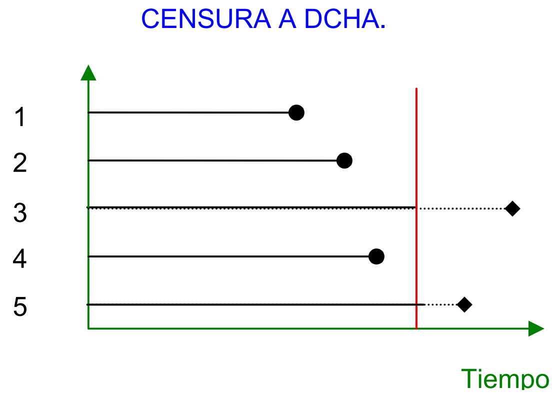
Cuando la censura ocurre para un valor $t > 0$ (i.e., algunos dispositivos siguen funcionando, no se sabe hasta cuando, tras finalizar el experimento) se habla de **censura a la derecha**.

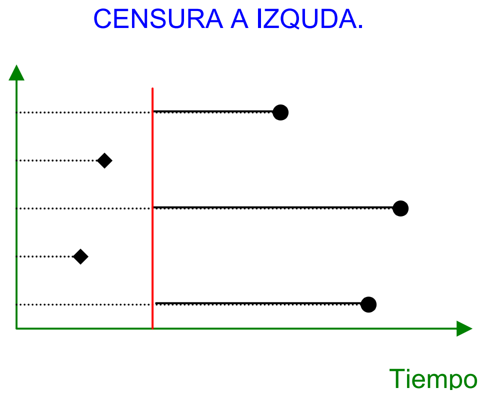
Por el contrario, cuando la censura ocurre para un valor $t < 0$ (i.e., algunos dispositivos ya estaban funcionando, no se sabe desde cuando, antes de iniciar el experimento) se habla de **censura a la izquierda**

Finalmente, se habla de **censura por intervalos** cuando se consideran observaciones que han sido censuradas tanto a derecha como a izquierda (es decir, cuando haya dispositivos que ya estaban funcionando antes de comenzar el experimento y que siguen funcionando cuando éste finaliza).

Ejemplo 5: Censura a izquierda

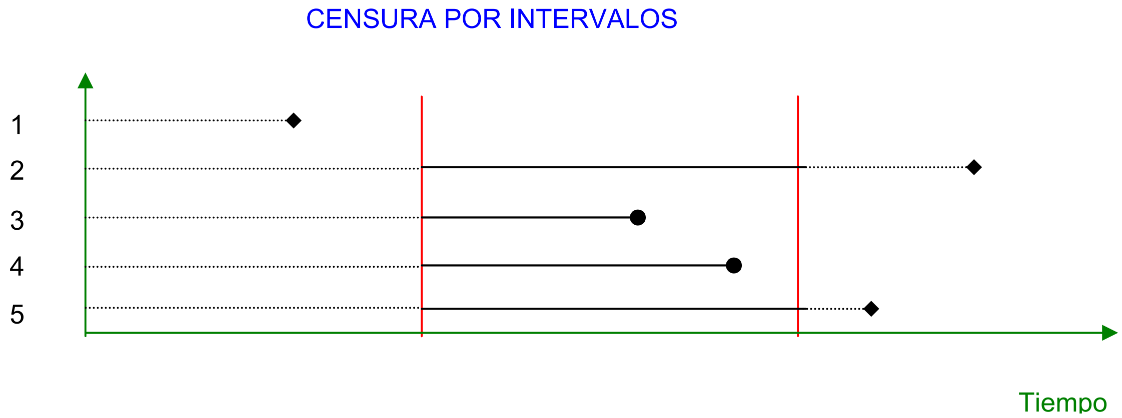
En una investigación médica sobre el cáncer, se puede saber que el paciente ingresó en el hospital en una fecha determinada (fecha de inicio del experimento), y que sobrevivió durante un intervalo temporal definido; sin embargo, probablemente no se conocerá cuándo aparecieron por primera vez los síntomas de la enfermedad. Se trataría, por tanto, de una censura a izquierda.





El símbolo ● denota un fallo observado

El símbolo ♦ denota un fallo no observado

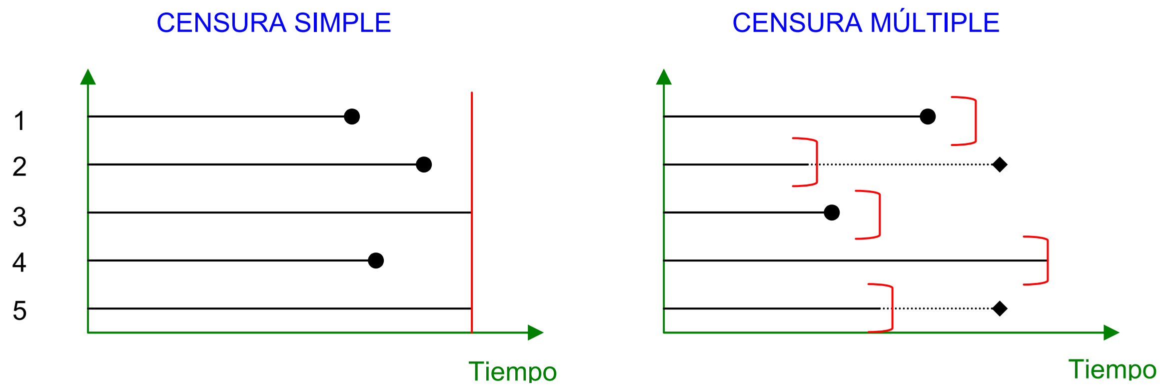


Censura simple y censura múltiple

Finalmente, se puede tener **censura simple**, si el experimento finaliza en el mismo instante para todos los dispositivos observados, o **censura múltiple**, cuando el experimento finaliza en instantes distintos según sea el dispositivo considerado.

Ejemplo 6: Censura múltiple

Se tendría censura múltiple en un experimento médico en el cual los pacientes abandonasen el hospital en instantes diferentes (bien por estar recuperados, bien por irse a otro centro, etc.).



El símbolo ● denota un fallo observado

El símbolo ♦ denota un fallo no observado