UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Ingeniería en Organización Industrial

Asignatura:

Ingeniería Industrial

Distribuciones habituales en fiabilidad

Índice de Contenidos

Distribuciones habituales en fiabilidad

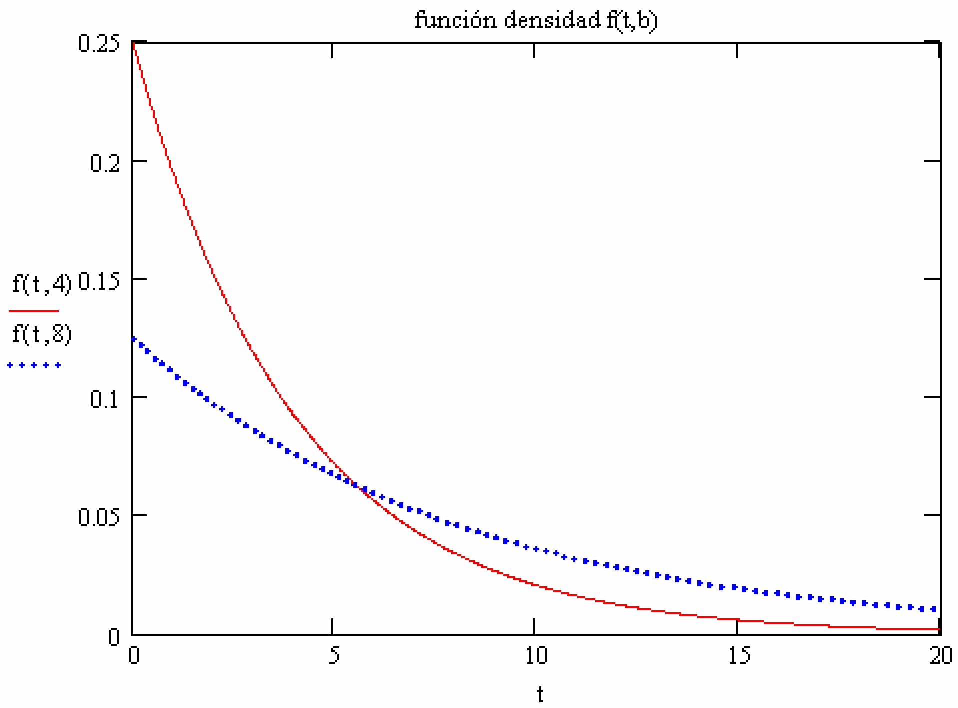
1 Introducción

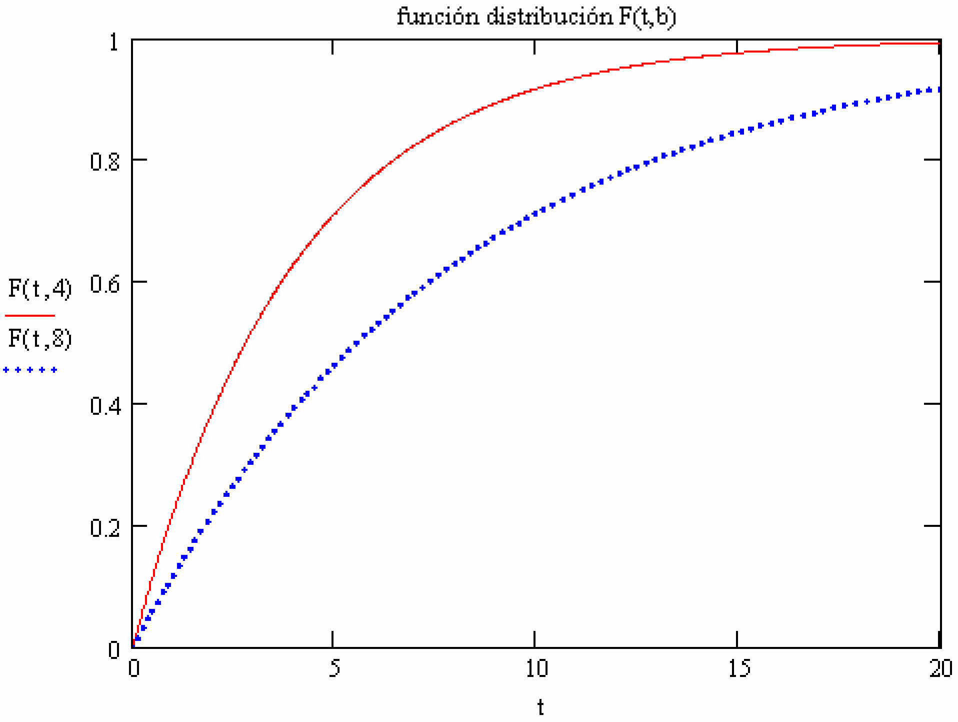
En este capítulo se van a describir algunas de las distribuciones teóricas más habituales en los estudios de fiabilidad. En concreto, introduciremos las siguientes distribuciones continuas: exponencial, Weibull, Gamma, *k*-Erlang y log-normal.

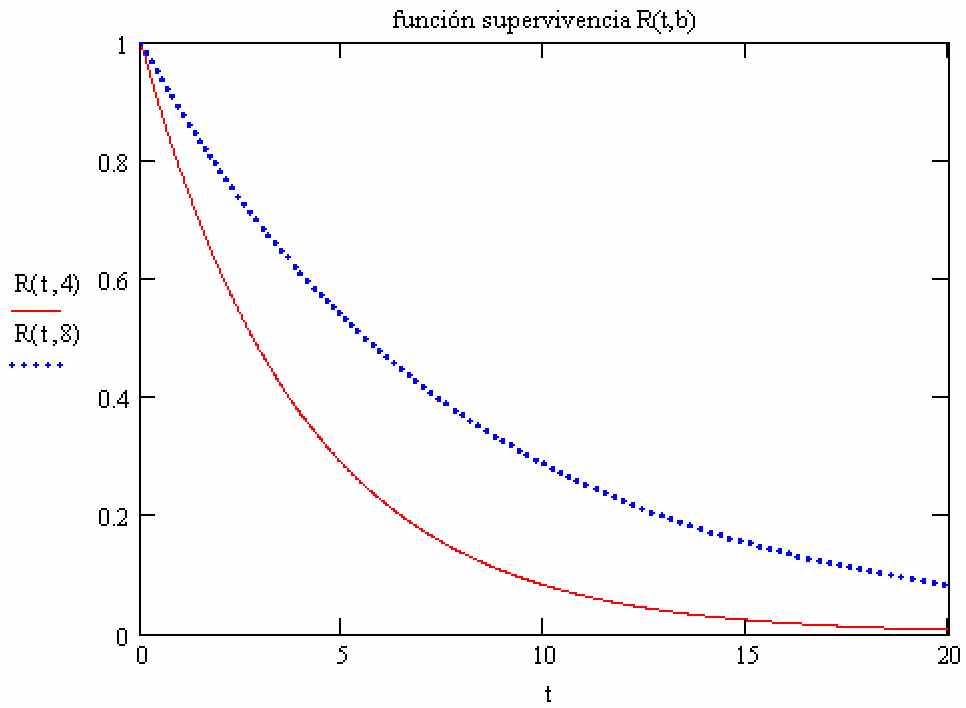
2 Distribución exponencial

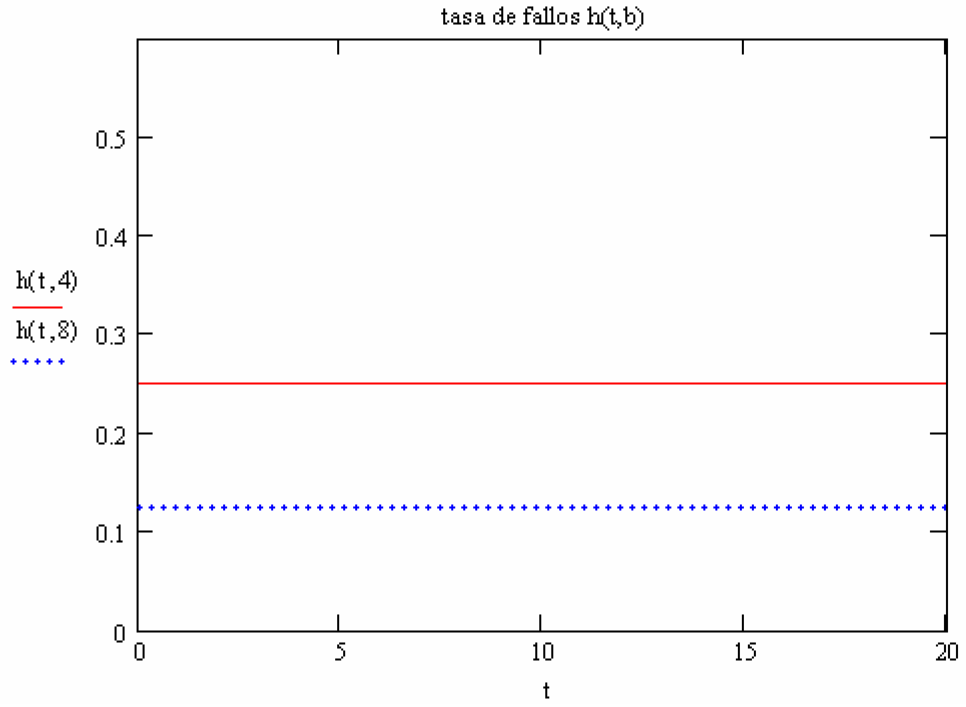
La distribución exponencial es una de las más utilizadas en fiabilidad, lo cual es debido a su simplicidad y al hecho de que proporciona un modelo con tasa de fallo constante. En el contexto de la curva de la bañera, esta distribución representa la zona central o etapa de vida útil del dispositivo, durante la cual la tasa de fallo permanece aproximadamente constante (esta etapa suele ser la predominante en la vida de componentes electrónicos o mecánicos).

Distribución exponencial
• Notación: $\exp(\beta)$ • Parámetros: $\beta > 0$ (escala) • Función de densidad: $f(t,\beta) = \frac{1}{\beta}\exp\{-t/\beta\}$, $t \geq 0$ • Función de distribución: $F(t,\beta) = 1 - \exp\{-t/\beta\}$, $t \geq 0$ • Media: β • Varianza: β^2


función densidad f(t,b)
f(t,4)
f(t,8)
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
5
10
15
20
t


función distribución F(t,b)
F(t,4)
F(t,8)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
20
t





Observación: relación entre exponencial y Poisson
Decir que la v.a. T = "tiempo entre dos fallos consecutivos" sigue una distribución

exponencial de parámetro β (tiempo medio entre fallos, supuesto constante a lo largo del experimento), es equivalente a decir que la v.a. n = "número de fallos producidos entre dos instantes consecutivos" sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 1/\beta$ (número medio de fallos entre dos instantes consecutivos, supuesto constante a lo largo del experimento).

Proposición: propiedad falta de memoria de la exponencial

Considérese un dispositivo cuyo tiempo de fallo siga una distribución exponencial. Si el dispositivo se encuentra funcionando en un instante t, la probabilidad de que éste falle en el intervalo $(t, t+\Delta t)$ sólo depende de la amplitud del intervalo, Δt, siendo dicha probabilidad independiente del tiempo t que lleve el dispositivo funcionando.

En cierto sentido, se puede decir pues que el dispositivo no "envejece" (con el tiempo no se hace más propenso a fallar) o, equivalentemente, que no tiene memoria (no "recuerda" el tiempo que lleva funcionando).

Demostración

La f.d. asociada a una distribución exponencial viene dada por la expresión siguiente:

$$F(t) = 1 - \exp\{-t/\beta\}$$

donde $\beta > 0$ (*scale*) es el parámetro que define la distribución. Por tanto:

$$P\left(t < T \le t + \Delta t \mid T > t\right) = \frac{\exp\{-t/\beta\} - \exp\{-(t+\Delta t)/\beta\}}{\exp\{-t/\beta\}} = 1 - \exp\{-\Delta t/\beta\}$$

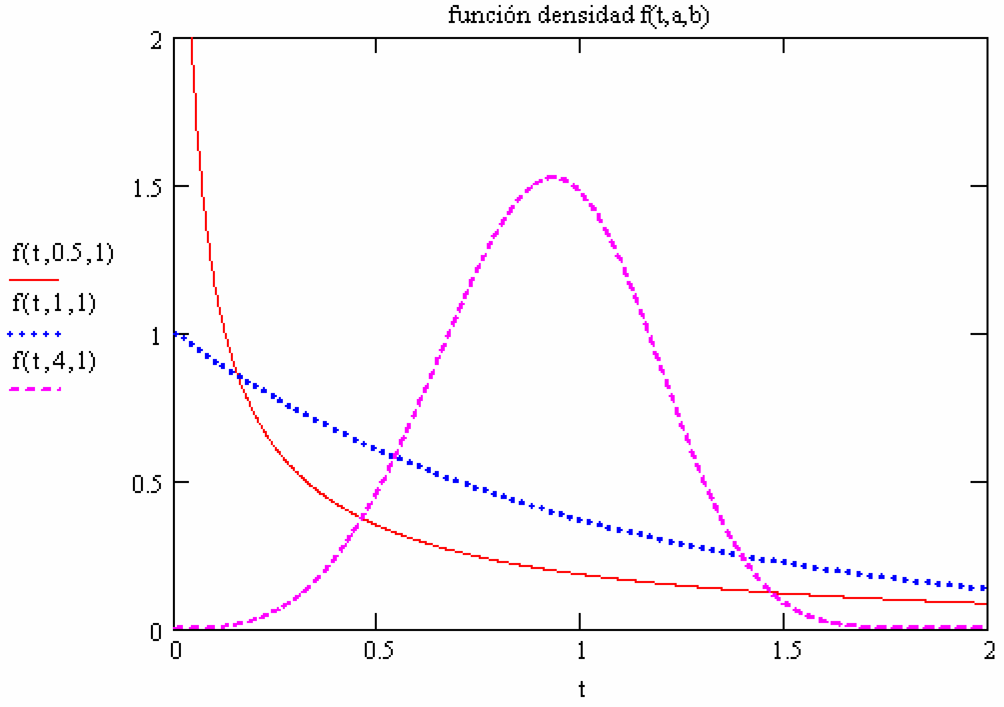
Expresión que no depende de t, sólo de la amplitud del intervalo considerado, Δt

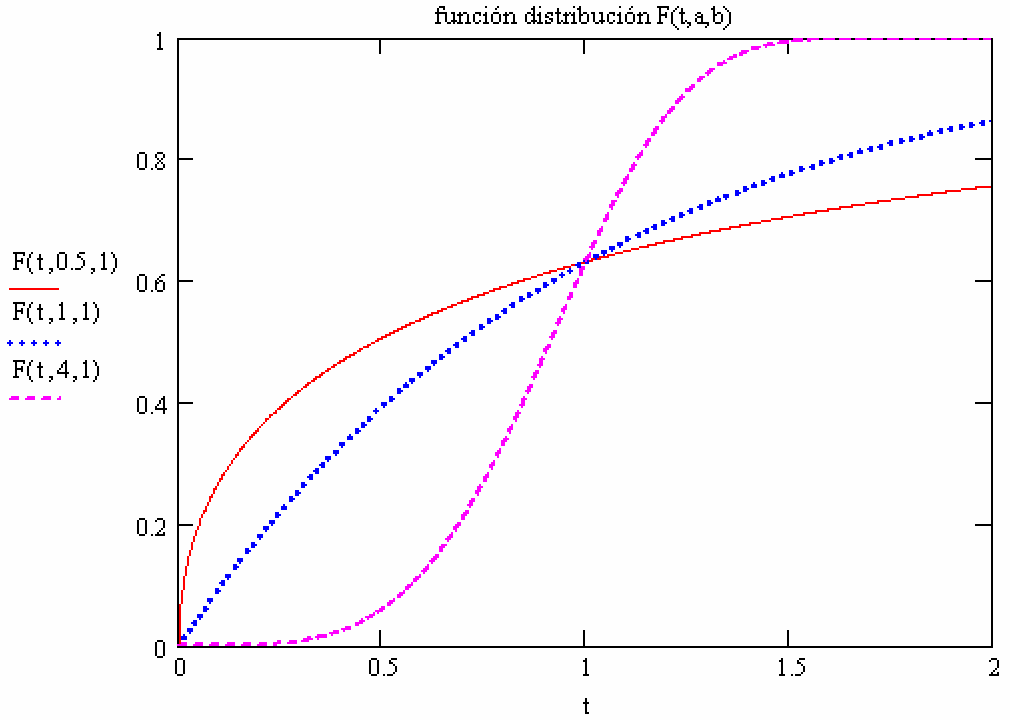
3 Distribución Weibull

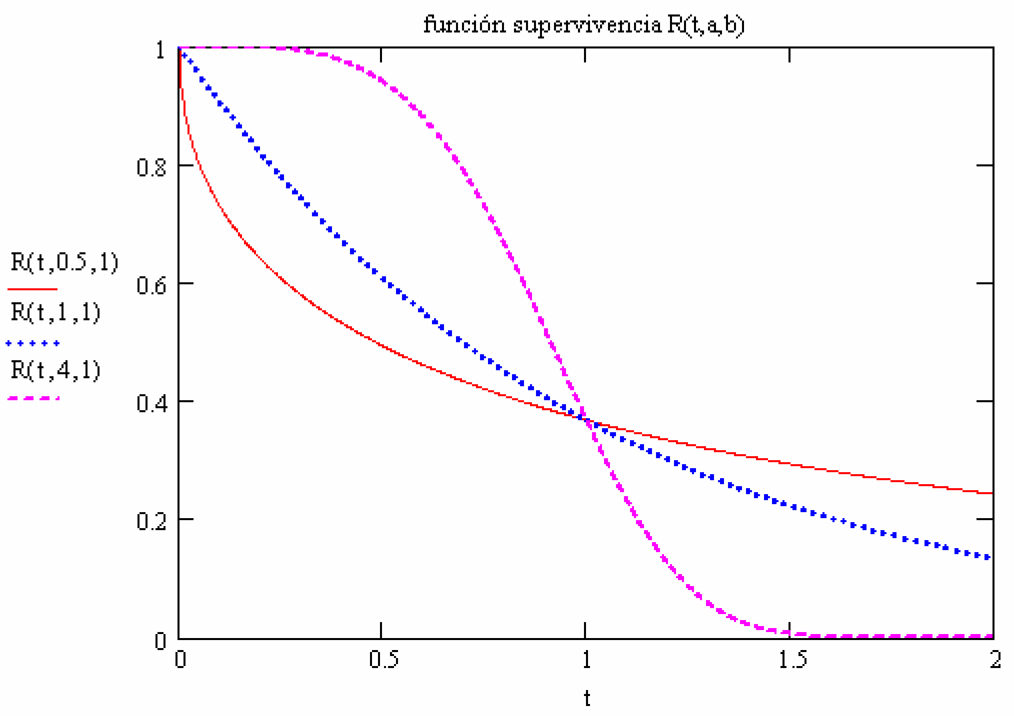
La distribución de Weibull es, probablemente, la distribución más utilizada en teoría de fiabilidad. De hecho, en muchas referencias bibliográficas se habla de análisis Weibull para hacer referencia a los estudios de fiabilidad. Ello se debe a la gran flexibilidad que presenta esta distribución, mediante la cual es posible modelar cada una de las tres etapas típicas de la curva de la bañera, i.e.: la etapa inicial -con tasa de fallo decreciente-, la etapa de vida útil -con tasa de fallo aproximadamente constante-, y la etapa final -caracterizada por una tasa de fallo creciente.

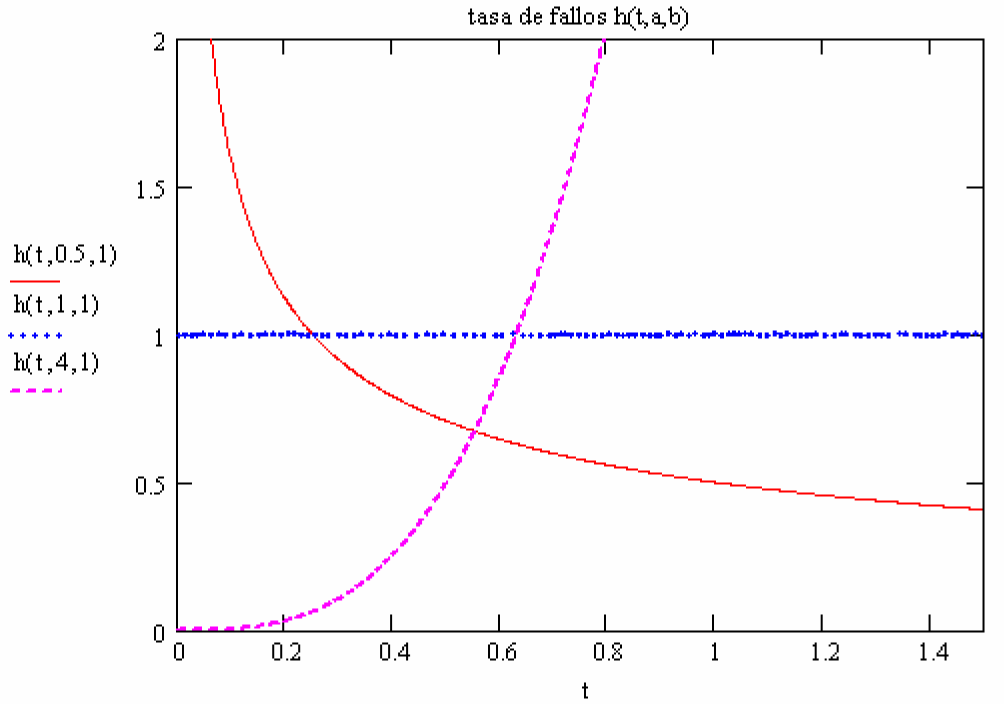
Distribución Weibull
• Notación: $Weibull(\alpha,\beta)$ • Parámetros: $\alpha>0$ (forma o *shape*), $\beta>0$ (escala) • Función de densidad: $f(t,\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha\cdot t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\cdot\exp\left\{(t/\beta)^{\alpha}\right\}}$, $t>0$ • Función de distribución: $F(t,\alpha,\beta)=1-\exp\left\{-(t/\beta)^{\alpha}\right\}$, $t>0$ • Media[1]: $\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ • Varianza: $\dfrac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\dfrac{2}{\alpha}\right)-\dfrac{1}{\alpha}\left[\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}$

[1] $\Gamma(k)=\int_0^{\infty} z^{k-1}\cdot e^{-z}\,dz$ es la función gamma


función densidad f(t,a,b)
f(t,0.5,1)
f(t,1,1)
f(t,4,1)
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
t


función distribución F(t,a,b)
F(t,0.5,1)
F(t,1,1)
F(t,4,1)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
t





Observación: tasas de fallo decrecientes, constantes y crecientes

Como se puede apreciar en los gráficos anteriores, la distribución Weibull puede utilizarse para modelar tasas de fallo decrecientes, constantes y crecientes en función del parámetro α (forma). En concreto:

- Si $0 < \alpha < 1$ → $h(t)$ es decreciente
- Si $\alpha = 1$ → $h(t)$ es constante
- Si $\alpha > 1$ → $h(t)$ es creciente

Proposición: relación Weibull - exponencial

La distribución exponencial se puede interpretar como un caso particular de la Weibull (o, dicho de otra forma, la Weibull se puede ver como una generalización de la exponencial). En concreto, la exponencial es una Weibull con parámetro de forma $\alpha = 1$, i.e.:

$$\exp(\beta) = Weibull(1, \beta)$$

Demostración

La f.d. asociada a una distribución Weibull de parámetros α (forma) y β (escala) viene dada por la expresión siguiente:

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-(t/\beta)^{\alpha}\right\}$$

Para el caso particular en que $\alpha = 1$, se obtiene la expresión:

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-t/\beta\right\}$$

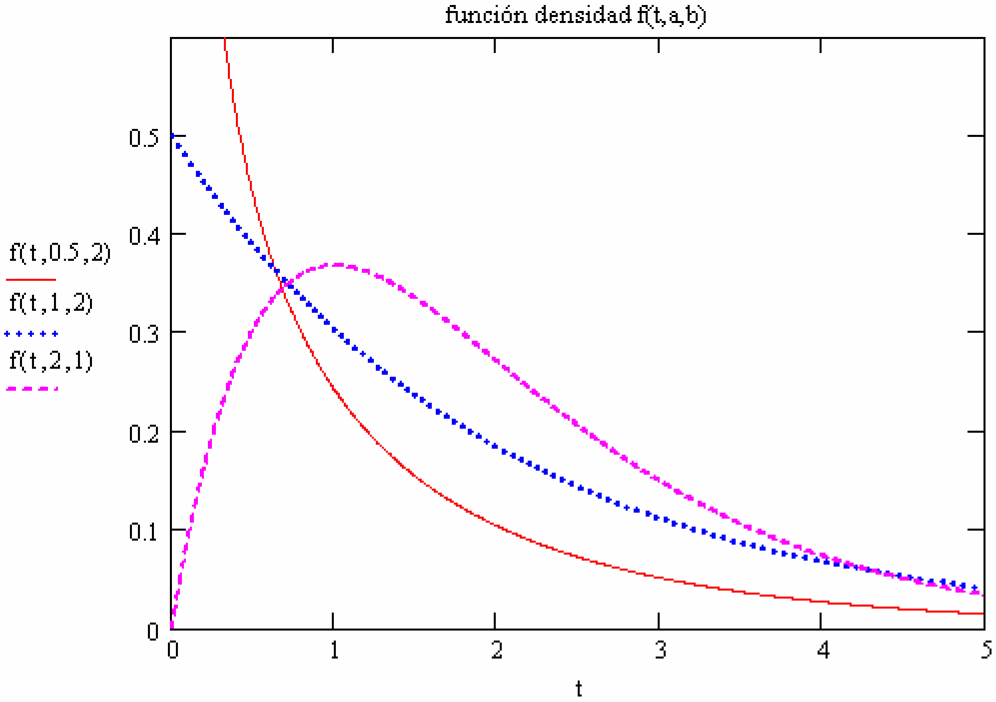
que es, precisamente, la f.d. asociada a una distribución exponencial de parámetro β (escala).

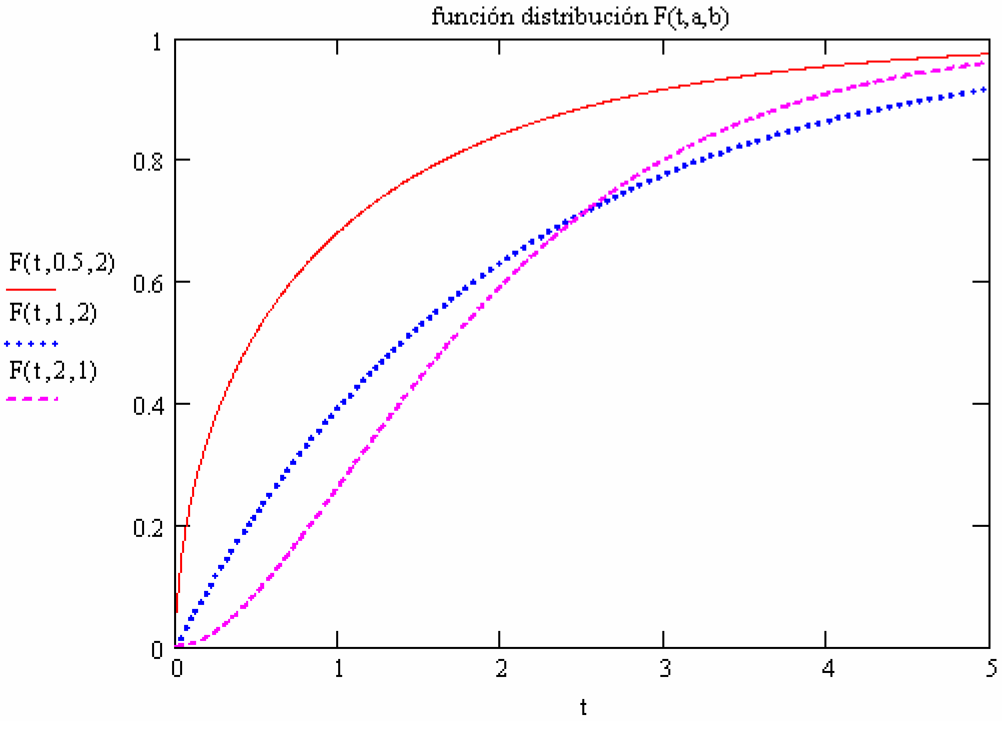
4 Distribuciones Gamma y k-Erlang

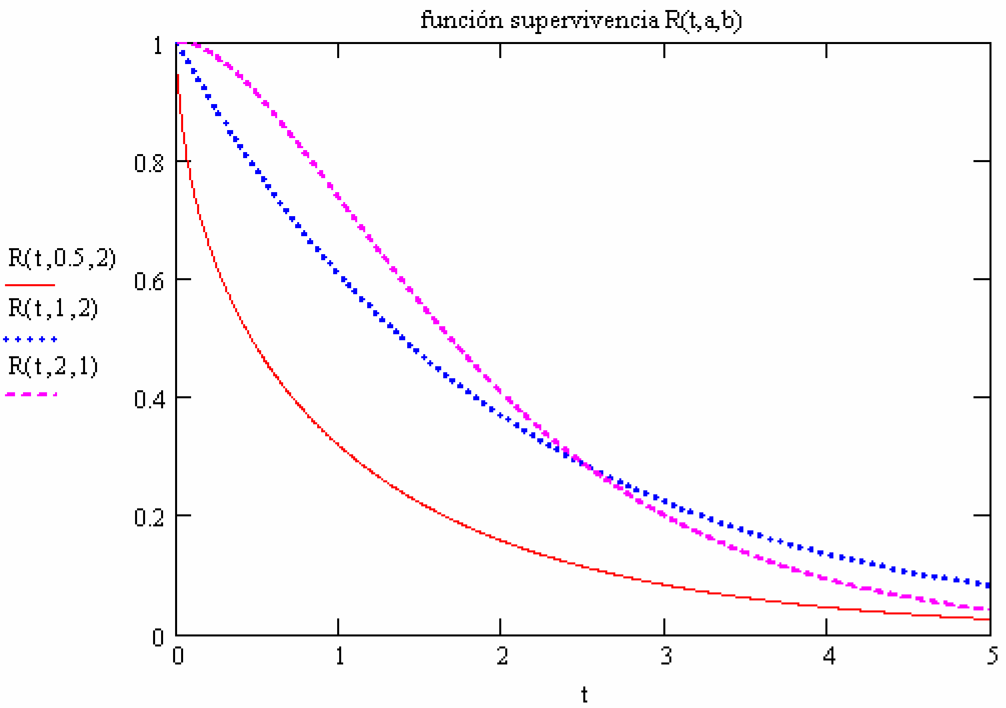
De forma similar a lo que ocurría con la distribución Weibull, la Gamma también permite modelar las tres etapas características de la curva de la bañera (tasas de fallo crecientes, constantes y decrecientes). Además, la distribución Gamma también puede interpretarse como una generalización de la exponencial.

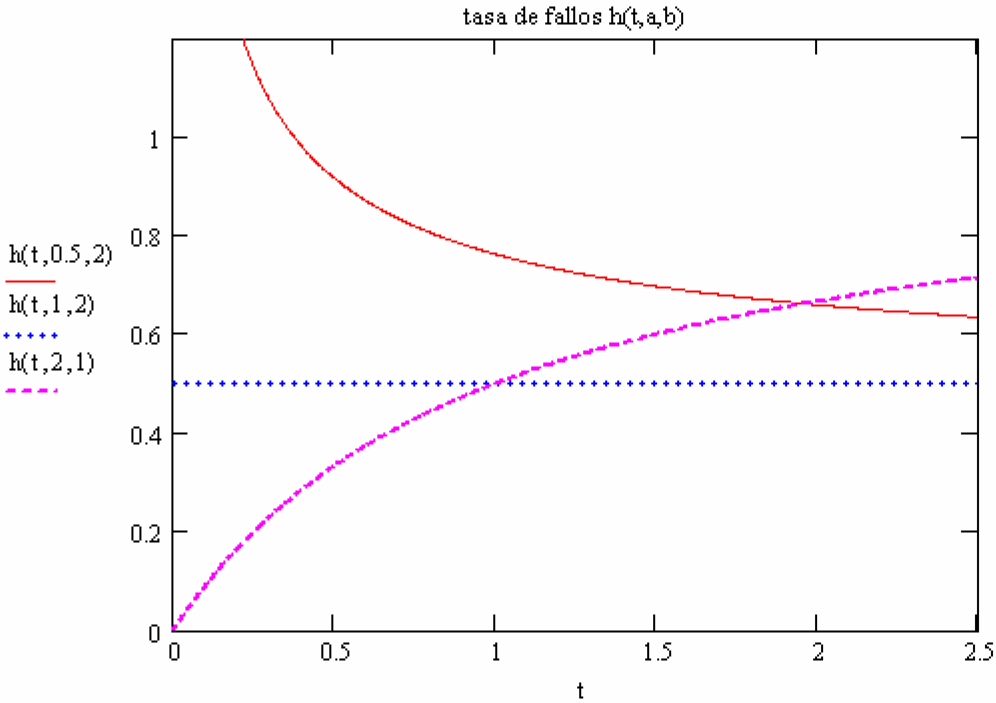
Otra distribución muy utilizada, y que nuevamente se puede considerar como un caso particular de la Gamma, es la *k*-Erlang.

Distribución Gamma
• Notación: $Gamma(\alpha, \beta)$ • Parámetros: $\alpha > 0$ (forma o *shape*), $\beta > 0$ (escala) • Función de densidad: $f(t, \alpha, \beta) = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \exp\{-t/\beta\}$, $t \geq 0$ • Función de distribución: debido a la complejidad de la integral resultante no existe, en general, una forma cerrada para $F(t, \alpha, \beta)$. • Media: $\alpha \cdot \beta$ • Varianza: $\alpha \cdot \beta^2$


función densidad f(t,a,b)
f(t,0.5,2)
f(t,1,2)
f(t,2,1)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
4
5
t


función distribución F(t,a,b)
F(t,0.5,2)
F(t,1,2)
F(t,2,1)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
1
2
3
4
5
t





Observación: tasas de fallo decrecientes, constantes y crecientes

Como se puede apreciar en los gráficos anteriores, la distribución Gamma puede utilizarse para modelar tasas de fallo decrecientes, constantes y crecientes en función del parámetro α (forma). En concreto:

- Si $0 < \alpha < 1 \rightarrow h(t)$ es decreciente
- Si $\alpha = 1 \rightarrow h(t)$ es constante
- Si $\alpha > 1 \rightarrow h(t)$ es creciente

Proposición: relación Gamma - exponencial

La distribución exponencial se puede interpretar como un caso particular de la Gamma (o, dicho de otra forma, la Gamma se puede ver como una generalización de la exponencial). En concreto, la exponencial es una Gamma con parámetro de forma $\alpha = 1$, i.e.:

$$\exp(\beta) = Gamma(1, \beta)$$

Demostración

La f.d.p. asociada a una distribución Gamma de parámetros α (forma) y β (escala) viene dada por la expresión siguiente:

$$f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha} \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \exp\{-t/\beta\}$$

Para el caso particular en que $\alpha = 1$, se obtiene la expresión:

$$f(t) = \frac{1}{\beta \cdot \Gamma(1)} \cdot \exp\{-t/\beta\} = \frac{1}{\beta} \cdot \exp\{-t/\beta\}$$

que es, precisamente, la f.d.p. asociada a una distribución exponencial de parámetro β (escala).

Observación: distribución *k*-Erlang

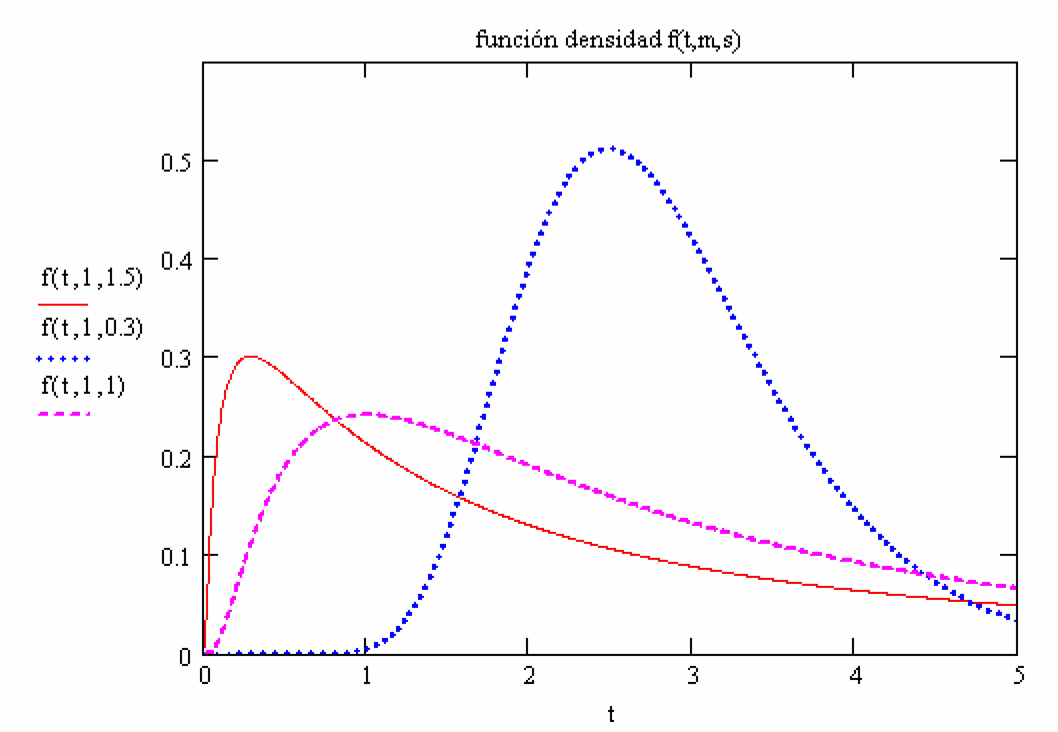
Se denomina distribución ***k*-Erlang** de parámetro β a una distribución $Gamma(k, \beta)$ en la que el parámetro de forma, *k*, es un entero positivo, i.e.:

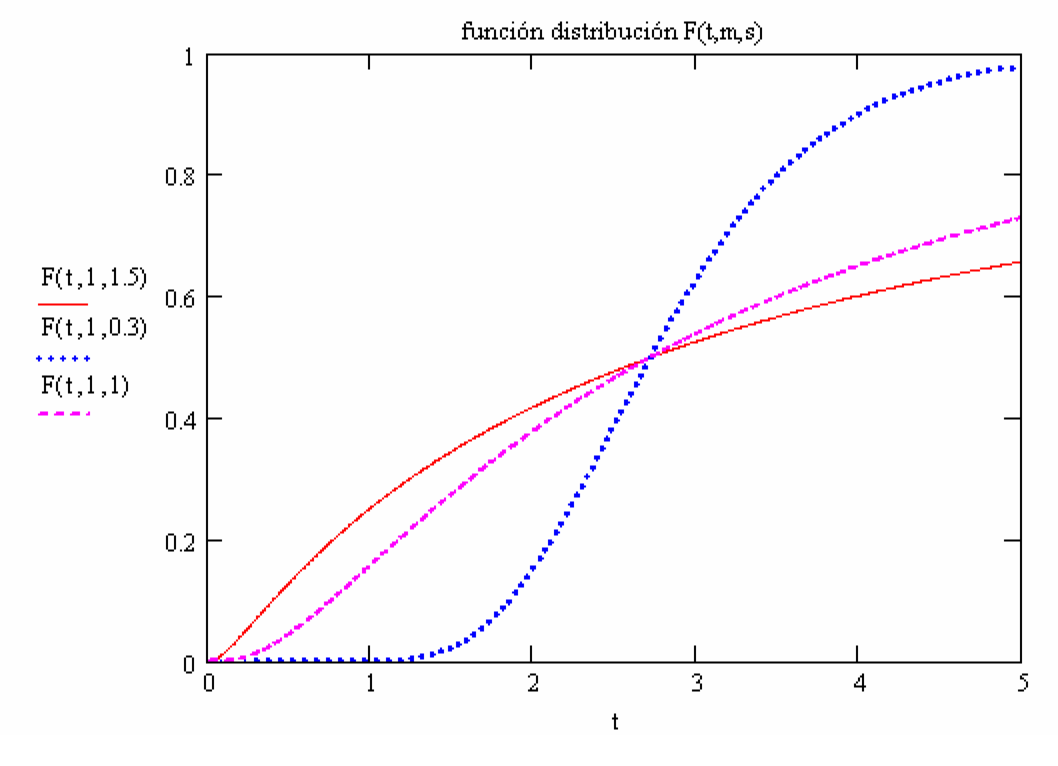
$$k - Erlang(\beta) = Gamma(k, \beta) \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}^{+}$$

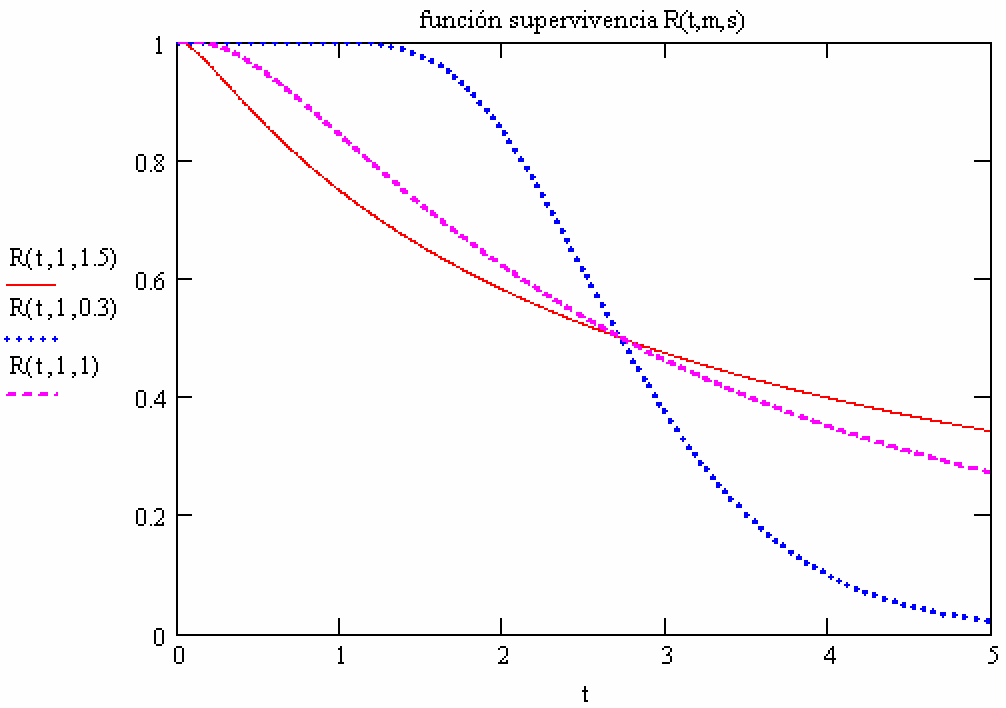
5 Distribución log-normal

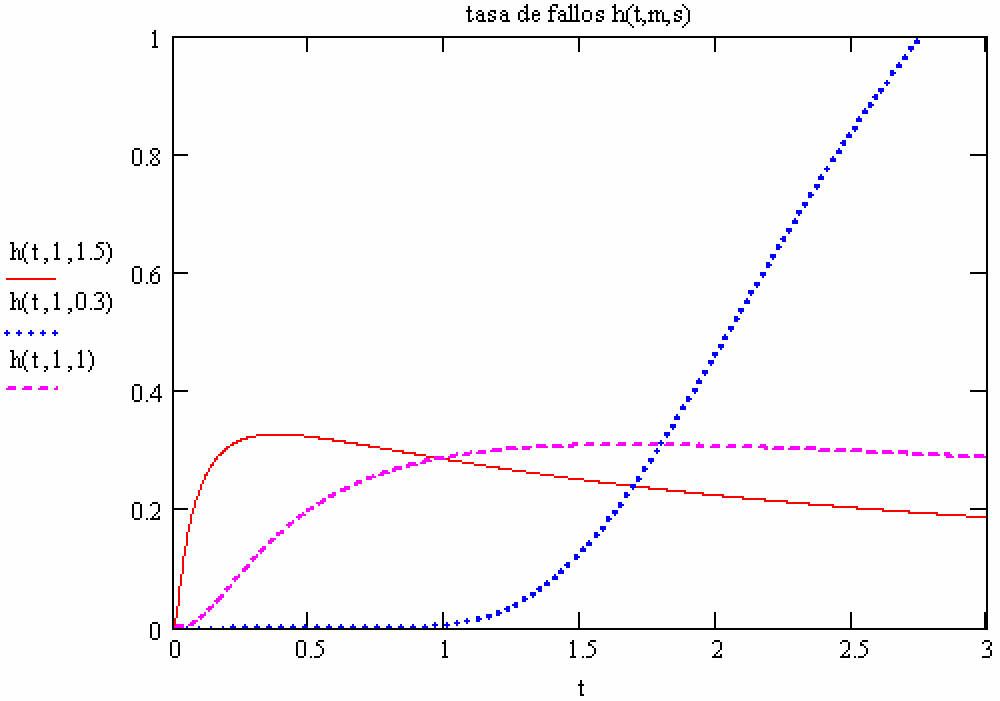
La distribución normal, sin duda la más importante de las distribuciones estadísticas, no resulta de mucho interés a la hora de modelar tiempos de fallo. Ello es debido al hecho de que la distribución normal admite valores negativos, lo cual contrasta con el hecho de que los tiempos transcurridos hasta el fallo sean siempre valores positivos. Para solventar esta dificultad, se suele recurrir a la distribución log-normal, derivada de la normal, que sólo considera valores positivos.

Distribución log-normal
• Notación: $LogNormal(\mu,\sigma)$ • Parámetros: $-\infty < \mu < \infty$ (localización), $\sigma > 0$ (escala) • Función de densidad: $f(t,\mu,\sigma) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $t > 0$ • Función de distribución: debido a la complejidad de la integral resultante no existe, en general, una forma cerrada para $F(t,\mu,\sigma)$. • Media: $\exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$ • Varianza: $\exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\} \cdot \left(\exp\left\{\sigma^2\right\} - 1\right)$


función densidad f(t,m,s)
f(t,1,1.5)
f(t,1,0.3)
f(t,1,1)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
1
2
3
4
5
t


función distribución F(t,m,s)
F(t,1,1.5)
F(t,1,0.3)
F(t,1,1)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
1
2
3
4
5
t


función supervivencia R(t,m,s)
R(t,1,1.5)
R(t,1,0.3)
R(t,1,1)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
t


tasa de fallos h(t,m,s)
h(t,1,1.5)
h(t,1,0.3)
h(t,1,1)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t

Proposición: relación lognormal - normal

Si una variable aleatoria T sigue una distribución $LogNormal(\mu,\sigma)$, entonces la variable aleatoria $X = \ln(T)$ se distribuye según una $Normal(\mu,\sigma)$.