UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Ingeniería en Organización Industrial

Asignatura:

Ingeniería Industrial

Análisis Paramétrico de los datos

Índice de Contenidos

Análisis Paramétrico de los datos

1 Introducción

En el tema anterior se describió un método gráfico que servía para tratar de ajustar la distribución empírica de los tiempos de fallo mediante alguna distribución teórica conocida (Weibull, exponencial, log-normal, gamma, etc.). Como ya se comentó entonces, en aquellos casos en que sea posible realizar dicho ajuste, se procederá a realizar un **análisis paramétrico** de los datos (i.e.: será posible analizar los datos suponiendo que éstos se comportan de acuerdo a alguna distribución teórica determinada). Si, por el contrario, no ha sido posible hallar ninguna distribución teórica que se ajuste correctamente a las observaciones, sólo será posible utilizar técnicas no paramétricas (i.e.: aquellas que no presuponen nada sobre la distribución que siguen los datos).

En resumen, cuando se logre ajustar las observaciones mediante alguna distribución teórica, los siguientes pasos a dar serán:

1. Estimar el valor de los parámetros que caracterizan dicha distribución. En concreto, el objetivo será hallar tanto estimadores puntuales como por intervalos para dichos parámetros. A la hora de aplicar los métodos estadísticos de estimación, será necesario considerar si las observaciones son completas o censuradas.

2. Realizar un análisis descriptivo de los tiempos de fallo (media, mediana, percentiles, etc.), usando para ello la distribución teórica ajustada (es lo que se conoce propiamente con el nombre de análisis paramétrico).

2 Estimación de parámetros en observaciones completas

2.1 Estimación puntual. Método de Máxima Verosimilitud.

La estimación puntual consiste en obtener, a partir de las observaciones, un valor que se aproxime al verdadero valor (desconocido) del parámetro de interés. Si bien hay otros métodos para determinar el estimador (como, por ejemplo, el Método de Mínimos Cuadrados), el más utilizado en la práctica es el llamado **Método de la Máxima Verosimilitud**, cuya idea general se explica a continuación:

Método de Máxima Verosimilitud (para observaciones completas)

Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo de fallo de un determinado dispositivo, el cual sigue una distribución teórica conocida cuya función de densidad de probabilidad viene dada por $f(t,\theta)$, siendo θ un parámetro cuyo valor se desconoce. Supóngase que se dispone de una muestra completa (i.e., sin observaciones censuradas) formada por n observaciones independientes de la variable T, las cuales se representarán por $t_1, t_2, ..., t_n$.

Asociada a la muestra anterior, se define la **función de verosimilitud** $L(\theta)$ como:

$$L(\theta) \equiv L(t_1, t_2, ..., t_n, \theta) = f(t_1, \theta) \cdot f(t_2, \theta) \cdot ... \cdot f(t_n, \theta)$$

La función de verosimilitud $L(\theta)$ se puede interpretar como una medida de lo probable que son las observaciones registradas bajo el supuesto de que éstas provienen de la distribución teórica especificada. Así, los valores de θ para los cuales $L(\theta)$ es relativamente grande serán más probables que los valores de θ para los cuales la probabilidad de las observaciones es relativamente pequeña.

Se tratará pues de hallar (si existe) un **estimador de máxima verosimilitud**, i.e., un valor del parámetro θ que maximice la función $L(\theta)$.

Observaciones (Método de Máxima Verosimilitud)

1. Cuando el valor θ que maximiza la función $L(\theta)$ existe y es único, éste se suele denotar por $\hat{\theta}$´
2. Para hallar el máximo global de $L(\theta)$, conviene empezar hallando los máximos locales de dicha función. Recordar que si θ es máximo local de $L(\theta)$, entonces:

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$$

3. En ocasiones, en lugar de hallar directamente los máximos locales de la función de verosimilitud, resultará más sencillo hallar los de la función logarítmica de verosimilitud, $\Lambda(\theta) = \ln L(\theta)$. Se verifica que, en caso de existir, el máximo global de una es el mismo que el de la otra.

Proposición: Estimador MV para la exponencial (observaciones completas)

Dadas n observaciones independientes, $t_1, t_2, \dots, t_n$, de una variable aleatoria T que se distribuye según una exponencial de media β desconocida, $\exp(\beta)$, el estimador de máxima verosimilitud para β es, precisamente, la media muestral, i.e.:

$$\hat{\beta} = \frac{L}{n}$$

siendo $L = \sum_{i=1}^{n} t_i$ el **tiempo total de funcionamiento** acumulado para las n observaciones.

Demostración

La f.d.p. asociada a una distribución exponencial viene dada por la expresión siguiente:

$$f(t,\beta)=\frac{1}{\beta}\exp\{-t/\beta\}$$

donde $\beta>0$ (*scale*) es el parámetro que define la distribución. En este caso, la función de máxima verosimilitud viene dada por:

$$L(\beta)=\frac{1}{\beta}\exp\{-t_1/\beta\}\cdot\frac{1}{\beta}\exp\{-t_2/\beta\}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\beta}\exp\{-t_n/\beta\}=\frac{1}{\beta^n}\exp\left\{-\frac{1}{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\right\}$$

Consideraremos la función logarítmica de verosimilitud, cuya derivada será más sencilla de calcular:

$$\ln L(\beta)=n\cdot\ln\left(\frac{1}{\beta}\right)-\frac{1}{\beta}\cdot\sum_{i=1}^{n}t_i\Rightarrow\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=n\cdot\beta-\sum_{i=1}^{n}t_i$$

Por tanto, hemos de resolver la ecuación:

$$n\cdot\beta-\sum_{i=1}^{n}t_i=0$$

de donde se obtiene que:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{n}$$

Observación: Estimador MV para la Poisson (observaciones completas)

Según vimos, si la variable aleatoria T = "tiempo entre dos fallos consecutivos" sigue una $\exp(\beta)$, la variable aleatoria X = "número de fallos por unidad de tiempo" sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda=1/\beta$ (siendo λ la tasa de fallos, supuesta constante a lo largo del tiempo). Así, el estimador de máxima verosimilitud para λ será:

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{\hat{\beta}}=\frac{n}{L}$$

siendo $L = \sum_{i=1}^{n} t_i$ el tiempo total de funcionamiento observado.

En el caso de distribuciones con más de un parámetro (la Weibull, por ejemplo), la aplicación del método de la Máxima Verosimilitud se complica (ello es debido, en primer lugar, al hecho de que en la búsqueda de los máximos locales se deben considerar derivadas parciales con respecto a cada variable y, además, a que el sistema resultante de igualar las derivadas parciales a cero no es trivial, siendo necesario utilizar métodos numéricos en su resolución). En tales casos, pues, recurriremos al uso de software estadístico para la obtención de dichos estimadores.

2.2 Estimación por intervalos.

A diferencia de lo que ocurre con la estimación puntual, la estimación por intervalos ofrece información sobre la exactitud de la estimación (i.e., sobre la diferencia entre el valor real y el estimado). Ello es debido a que este tipo de estimación proporciona un intervalo dentro del cual hay una alta probabilidad (nivel de confianza) de que esté contenido el verdadero valor del parámetro.

Proposición: Intervalo de confianza para β en una exponencial (obs. completas)

Dadas n observaciones independientes, $t_1, t_2, \ldots, t_n$, de una variable aleatoria T que se distribuye según una exponencial de media β desconocida, $\exp(\beta)$, un intervalo de confianza, a nivel de confianza $(1-\alpha)\%$, para β viene dado por:

$$\frac{2L}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)} \leq \beta \leq \frac{2L}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}$$

donde $L = \sum_{i=1}^{n} t_i$ es el tiempo total de funcionamiento observado para los n dispositivos considerados, y $\chi^2_p(g)$ es el percentil de orden p en una distribución

χ^2 (Chi-cuadrado) con g grados de libertad (i.e., es aquel valor que, en una χ^2 con g grados de libertad, deja a su izquierda un área p).

Observación: Intervalo de confianza para λ en una Poisson (obs. completas)

Siguiendo el razonamiento iniciado en la observación anterior, queda claro que un intervalo de confianza para $\lambda = 1/\beta$ vendrá dado por:

$$\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2L} \leq \lambda \leq \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2L}$$

donde $L = \sum_{i=1}^{n} t_i$ es el tiempo total de funcionamiento observado.

3 Estimación de parámetros en observaciones censuradas

Para obtener observaciones sobre los tiempos de fallo de un dispositivo, se suelen llevar a cabo tests de vida. Realizar un **test de vida** sobre un tipo de dispositivo concreto consiste en estudiar la evolución temporal -bajo unas determinadas condiciones de funcionamiento- de una muestra de dichos dispositivos, registrando el instante en que falla cada uno de los componentes de la muestra. En general, hay dos tipos de tests de vida, los **tests con re-emplazamiento** –i.e.: aquellos en los que, de forma inmediata, los componentes que fallan son reemplazados -, y los **tests sin re-emplazamiento**.

Al realizar un test de vida de duración determinada, es frecuente que éste finalice sin que hallan fallado todos los dispositivos de la muestra, lo que dará lugar a la aparición de **observaciones censuradas**. En fiabilidad, el tipo de censura más habitual es **censura a la derecha**, por lo que la discusión teórica del tema se centrará en este tipo de censura.

En presencia de observaciones censuradas, una explicación detallada de los métodos de estimación, tanto puntual como por intervalos, queda fuera de los objetivos de este curso. Por dicho motivo, nos limitaremos aquí a presentar el caso de la distribución exponencial. En el resto de los casos, haremos uso de software estadístico para obtener los estimadores correspondientes.

3.1 Estimación puntual. Caso exponencial.

Proposición: Estimador MV para la exponencial (observaciones censuradas)

Supóngase que se inicia un test de vida sobre n dispositivos idénticos y que la variable aleatoria T (tiempo de vida hasta el fallo) se distribuye según una exponencial de media β desconocida, $\exp(\beta)$. El estimador de máxima verosimilitud para β es:

$$\hat{\beta} = \frac{L}{r}$$

siendo r el número de fallos observados en el test y L el tiempo total de funcionamiento acumulado, el cual vendrá dado por:

- $L = n \cdot t_0$ si se trata de un test con re-emplazamiento y la censura es de tipo I (i.e., por tiempo), siendo t_0 el instante en que finaliza el test
- $L = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r) \cdot t_0$ si se trata de un test sin re-emplazamiento y la censura es de tipo I, siendo t_0 el instante en que finaliza el test
- $L = n \cdot t_r$ si se trata de un test con re-emplazamiento y la censura es de tipo II (i.e., por número de errores), siendo t_r una variable aleatoria que representa el instante en que falla la r-ésima observación
- $L = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r) \cdot t_r$ si se trata de un test sin re-emplazamiento y la censura es de tipo II, siendo t_r una variable aleatoria que representa el instante en que falla la r-ésima observación

Ejemplo 1: Estimación MV para la exponencial (obs. censuradas)

Se inicia un test de vida sobre diez dispositivos idénticos, cuyos tiempos de fallo siguen una distribución $\exp(\beta)$. El test finaliza en el instante t_0 = 850 horas. Al finalizar el test, se observa que ocho dispositivos han fallado, siendo los tiempos de fallo respectivos: 183, 318, 412, 432, 553, 680, 689 y 748. Se desea obtener el estimador MV para β (tiempo medio hasta el fallo) en cada una de las siguientes circunstancias:

a) En el supuesto de que los dispositivos son inmediatamente reemplazados cuando fallan
b) En el supuesto de que los dispositivos no son reemplazados al fallar
c) Cuando el test finaliza tras el fallo del octavo dispositivo y se cumple (a)
d) Cuando el test finaliza tras el fallo del octavo dispositivo y se cumple (b)

En el caso (a) estamos ante un test de tipo I con re-emplazamiento. Por tanto, $L = n \cdot t_0$ = 10 x 850 = 8500 h es la duración total del test.

Así pues, se tendrá que: $\hat{\beta} = \frac{L}{r}$ = 8500 / 8 = 1062.5 h es la vida media estimada del dispositivo.

En el caso (b) estamos ante un test de tipo I sin re-emplazamiento. Por tanto, $L = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r) \cdot t_0$ = 4015 + (10 – 8)850 = 5715 h y $\hat{\beta} = \frac{L}{r}$ = 5715 / 8 = 714.4 h.

En el caso (c) estamos ante un test de tipo II (el fallo se produce en el instante t_8 =748) con re-emplazamiento. Por tanto, $L = n \cdot t_r$ = 10 x 748 = 7480 h y $\hat{\beta} = \frac{L}{r}$ = 7480 / 8 = 935 h.

En el caso (d) estamos ante un test de tipo II sin re-emplazamiento. Por tanto, $L = \sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r) \cdot t_r$ = 4015 + (10 – 8)748 = 5511 h y $\hat{\beta} = \frac{L}{r}$ = 5511 / 8 = 688.8 h.

3.2 Estimación por intervalos. Caso exponencial.

En el apartado anterior se comentó, cuando los tiempos de fallo se distribuyen según una $\exp(\beta)$, el estimador MV para el parámetro β (tiempo medio de vida) viene dado por $\hat{\beta} = \frac{L}{r}$, donde r es el número de fallos observados en el test y L es el tiempo total de funcionamiento durante el test.

Proposición: Intervalo de confianza para β en una exponencial con censura tipo II

En el caso de censura de tipo II (por número de fallos), es posible probar que la cantidad $\frac{2L}{\beta}$ se distribuye según una χ^2 (Chi-cuadrado) con $2r$ grados de libertad, lo que permite obtener los correspondientes intervalos de confianza. En efecto, según lo dicho:

$$\Pr\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2r) \le \frac{2L}{\beta} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r)\right] = 1-\alpha$$

i.e.:

$$\Pr\left[\frac{2L}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r)} \le \beta \le \frac{2L}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2r)}\right] = 1-\alpha$$

con lo que el intervalo buscado para β, a un nivel de confianza $(1-\alpha)\%$, viene dado por:

$$\frac{2L}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r)} \le \beta \le \frac{2L}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2r)}$$

Observación: Observaciones completas y censura de tipo II

El intervalo anterior es una generalización del visto para el caso de observaciones completas. Ello no es de extrañar si se tiene en cuenta que las observaciones completas se pueden interpretar como un caso particular de observaciones censuradas de tipo II (en concreto, cuando $n = r$).

Proposición: Intervalo de confianza para β en una exponencial con censura tipo I

En el caso de censura de tipo I (por tiempo), se suele utilizar el siguiente intervalo de confianza para β:

$$\frac{2L}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r+2)} \le \beta \le \frac{2L}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2r)}$$

Ejemplo 2: Estimación por intervalos para la exponencial (obs. censuradas)

Se inicia un test de vida sobre veinticinco dispositivos idénticos, cuyos tiempos de fallo se distribuyen según una $\exp(\beta)$. El test es con re-emplazamiento, tiene una duración de 500 horas y los tiempos de fallo registrados son los ocho siguientes: 75, 115, 192, 258, 312, 389, 410 y 496 horas. Encuentra el intervalo de confianza, con un nivel del 90%, para β (tiempo medio hasta el fallo).

En este caso, se trata de un test con re-emplazamiento y con censura de tipo I (por tiempo). Por tanto, el tiempo total acumulado es: $L = n \cdot t_0$ = 25 x 500 = 12500 horas.

El intervalo de confianza para β, a un nivel de confianza del 90% será:

$$\frac{2 \cdot 12500}{\chi^2_{0.95}(2 \cdot 8 + 2)} \le \beta \le \frac{2 \cdot 12500}{\chi^2_{0.05}(2 \cdot 8)}$$

y, puesto que $\chi^2_{0.05}(16) = 7.96$ y $\chi^2_{0.95}(18) = 28.87$, se llega al siguiente intervalo: $(865.95, 3140.70)$

4 Análisis paramétrico con MINITAB

Una vez se ha logrado identificar (usando las técnicas gráficas explicadas en el tema anterior) alguna distribución teórica que se ajuste bien a las observaciones, es posible utilizar las opciones que ofrece MINITAB (***Reliability/Survival > Distribution Analysis > Parametric Distribution Analysis...***) para obtener un análisis paramétrico bastante completo de los tiempos de fallo.

Al realizar un análisis paramétrico de los datos, se le deben indicar al programa los ***inputs*** siguientes:

- Columna que contiene las observaciones
- Tipo de censura: a derecha o arbitraria (de cualquier tipo)
- Distribución elegida para ajustar a las observaciones
- Método estadístico (máxima verosimilitud o mínimos cuadrados) que se desea emplear para realizar las estimaciones de los parámetros característicos de la distribución seleccionada
- Nivel de confianza para la estimación, por intervalos, de los parámetros característicos de la distribución seleccionada
- Otros *inputs* opcionales (porcentajes para los que se desea hallar percentiles de la distribución, instantes temporales para los que se desea estimar la fiabilidad, gráficos de probabilidad o de supervivencia, etc.)

Por su parte, el programa ofrece los ***outputs*** siguientes:

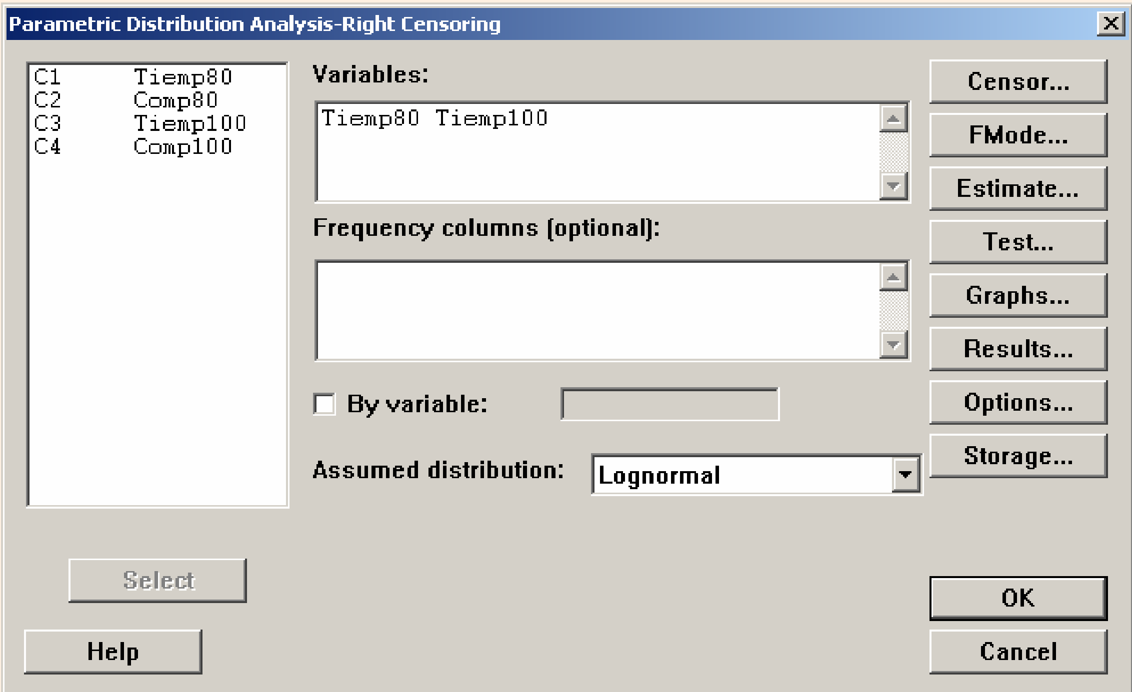
- Información sobre las observaciones (número de observaciones completas y censuradas, tipo de censura, distribución seleccionada para realizar el ajuste y método de estimación elegido)
- Estimaciones, puntuales y por intervalos, para los parámetros característicos de la distribución seleccionada para ajustar los datos. Se incluye también un estadístico que permite medir la bondad del ajuste
- Estadísticos descriptivos de la distribución concreta seleccionada (usando como parámetros de la misma los estimadores obtenidos)
- Tabla de percentiles: en ella se muestran estimaciones para los tiempos de fallo asociados a distintos porcentajes de dispositivos
- Tabla de supervivencia: en ella se muestran las probabilidades de supervivencia para distintos instantes temporales

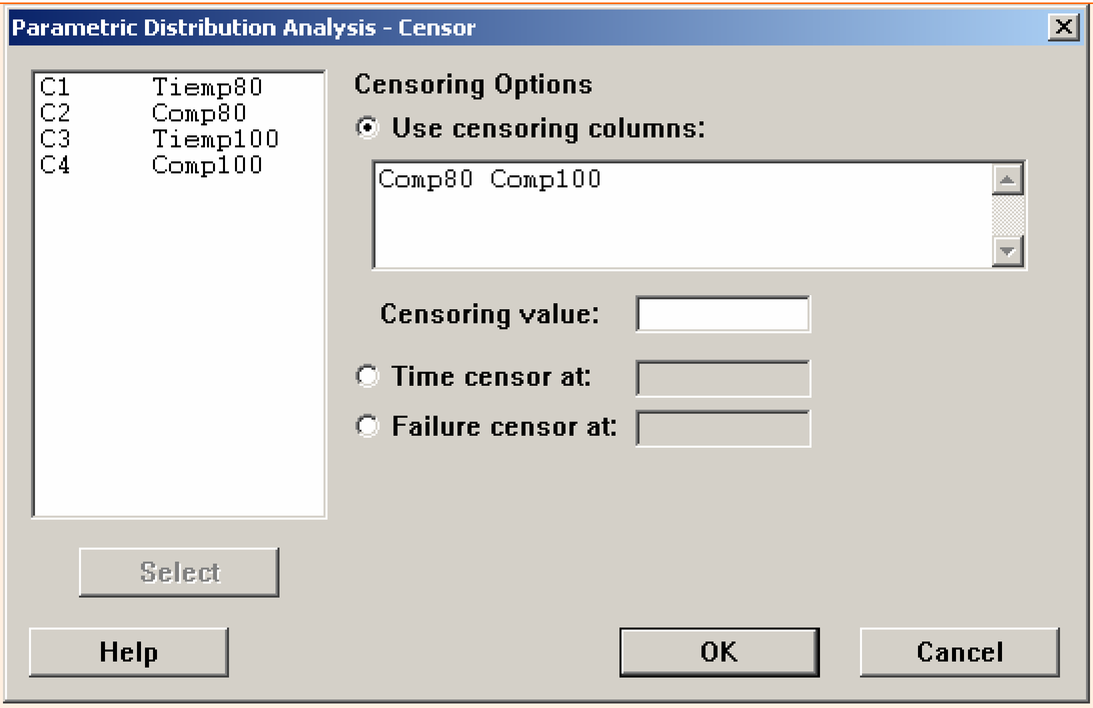
- Opcionalmente, los porcentajes, instantes temporales y gráficos solicitados

Ejemplo 3: Análisis paramétrico con MINITAB (obs. con censura a derecha)

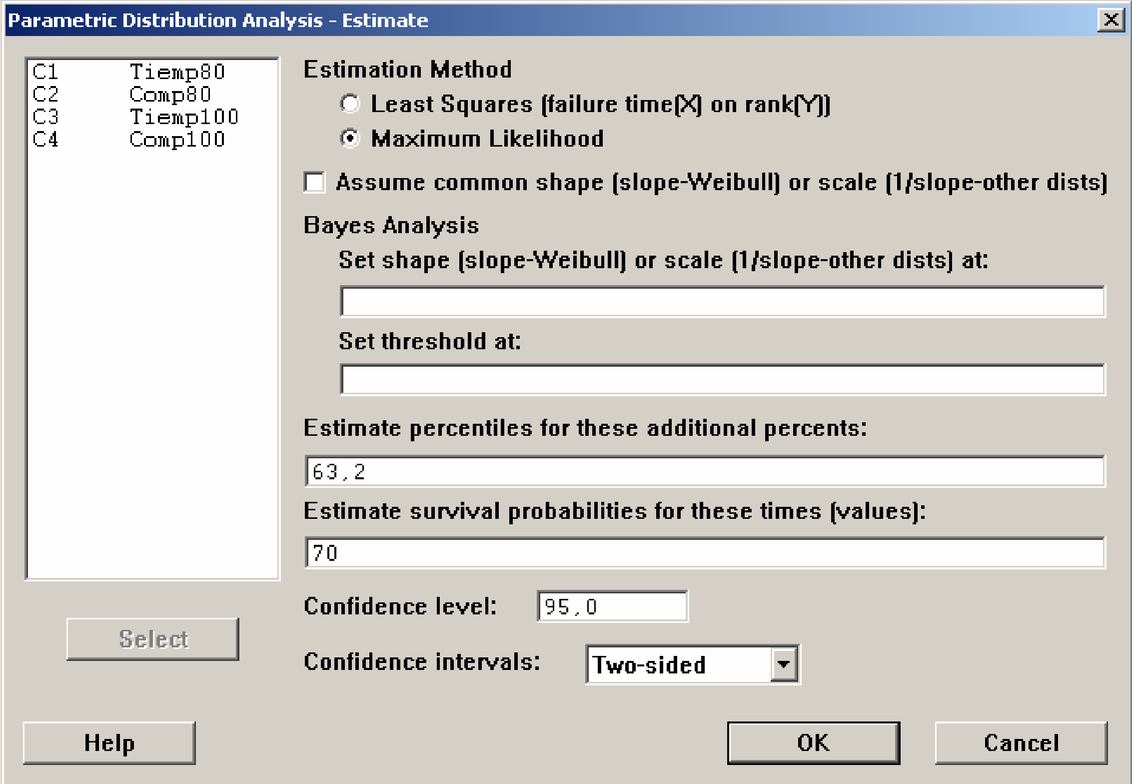
Continuando con el ejemplo de la compañía que fabrica cubiertas para motores, el cual fue introducido en el capítulo anterior, vamos a realizar ahora el análisis paramétrico de los datos con ayuda de MINITAB.

En primer lugar, puesto que se trata de observaciones censuradas a derecha, elegimos la opción ***Reliability/Survival > Distribution Análisis (Right Censoring) > Parametric Distribution Analysis...*** y especificamos las columnas que contienen los datos (tiempos de fallo observados para ambos grupos y calificadores de censura respectivos) así como la distribución seleccionada para el ajuste (ya vimos en el capítulo anterior que la log-normal era la que mejor parecía ajustar las observaciones de este ejemplo):

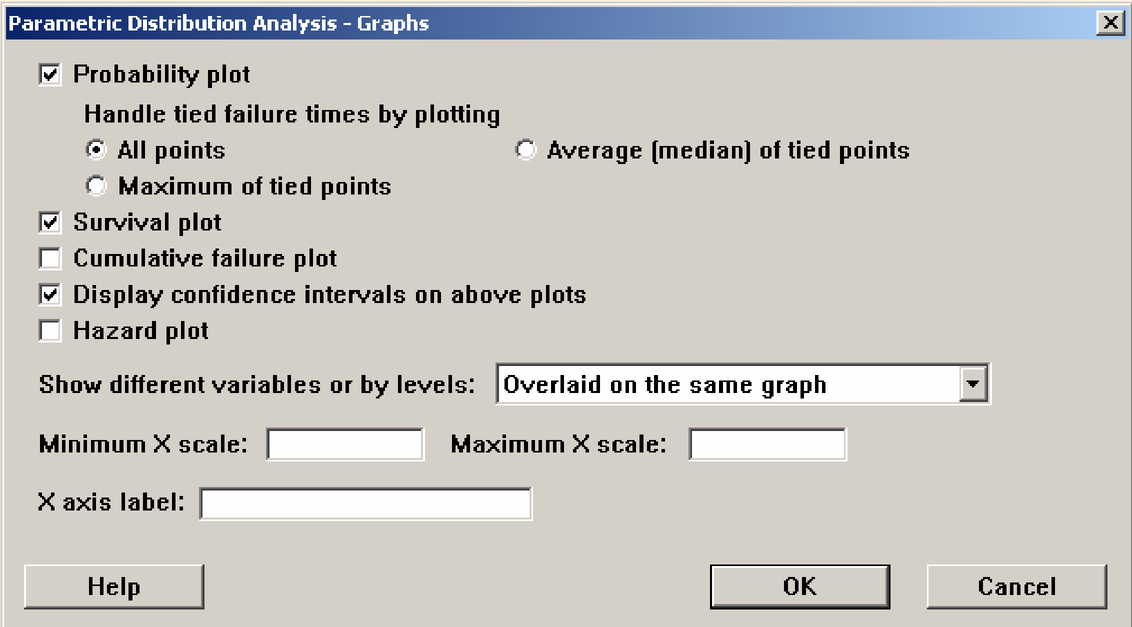




A continuación, especificamos el método de estimación que deseamos utilizar (máxima verosimilitud en este caso), el nivel de confianza para la estimación por intervalos (usaremos un nivel del 95%), aquellos porcentajes para los cuales deseamos obtener percentiles (se desea obtener el instante temporal en que habrán fallado el 63,2% de los dispositivos) y la probabilidad de supervivencia en un instante concreto (se desea estimar, en este caso, la probabilidad de que este tipo de dispositivos sobreviva un mínimo de 70 meses):



Finalmente, optaremos también por solicitar dos gráficos, uno de probabilidad y otro que muestre la función de supervivencia:



El programa ofrece un *output* para cada una de las variables consideradas (tiempo de fallo de los cubiertas a 80ºC y tiempo de fallo de las cubiertas a 100ºC). A continuación, analizaremos la información que se nos ofrece sobre las cubiertas a 80ºC (la información que se ofrece sobre las cubiertas a 100ºC se puede analizar de forma análoga):

En primer lugar, el programa proporciona el número de observaciones completas y censuradas, el valor que indica la existencia de censura (ésta viene indicada por un valor 0 en la columna Comp80), el método de estimación empleado (Máxima Verosimilitud), la distribución elegida para el ajuste (log-normal), los estimadores (puntuales y por intervalos) obtenidos para los parámetros que caracterizan a la distribución (en este caso estamos ante una $LogNormal(4.0927, 0.4862)$, así como una medida de la bondad del ajuste (estimador Anderson-Darling, el cual representa una medida de la "distancia" existente entre la distribución ajustada y la empírica).

Session

Distribution Analysis: Tiemp80

```
Variable: Tiemp80

Censoring Information  Count
Uncensored value          37
Right censored value      13

Censoring value: Comp80 = 0

Estimation Method: Maximum Likelihood

Distribution:   Lognormal


Parameter Estimates

                      Standard    95,0% Normal CI
Parameter  Estimate      Error      Lower      Upper
Location    4,09267  0,0719681    3,95161    4,23372
Scale      0,486216  0,0606247   0,380799   0,620816

Log-Likelihood = -181,625

Goodness-of-Fit
Anderson-Darling (adjusted) = 67,800
```

El *output* ofrece también los estadísticos descriptivos asociados a la distribución de ajuste obtenida, así como una tabla de percentiles (en la que se observa, por ejemplo, que un 9% de los dispositivos habrán fallado tras 31.2 meses de funcionamiento y que un 20% habrán fallado tras 39.8 meses).

Session

Characteristics of Distribution

	Estimate	Standard Error	95,0% Normal CI Lower	Upper
Mean(MTTF)	67,4153	5,55245	57,3656	79,2255
Standard Deviation	34,8145	6,79827	23,7435	51,0476
Median	59,8995	4,31085	52,0192	68,9735
First Quartile(Q1)	43,1516	3,29526	37,1531	50,1186
Third Quartile(Q3)	83,1475	7,37690	69,8763	98,9392
Interquartile Range(IQR)	39,9959	6,33317	29,3245	54,5505

Table of Percentiles

Percent	Percentile	Standard Error	95,0% Normal CI Lower	Upper
1	19,3281	2,83750	14,4953	25,7722
2	22,0674	2,92559	17,0178	28,6154
3	24,0034	2,97261	18,8304	30,5975
4	25,5709	3,00355	20,3126	32,1906
5	26,9212	3,02621	21,5978	33,5566
6	28,1265	3,04403	22,7506	34,7727
7	29,2276	3,05881	23,8074	35,8819
8	30,2501	3,07165	24,7910	36,9113
9	31,2110	3,08326	25,7170	37,8788
10	32,1225	3,09409	26,5962	38,7970
20	39,7837	3,20997	33,9646	46,5999

El programa ofrece también una tabla de probabilidades de supervivencia. En este caso, nos dice (en respuesta a la solicitud formulada en la fase de *inputs*) que la probabilidad de que un dispositivo de este tipo sobreviva tras 70 meses de funcionamiento es de 0.3743.

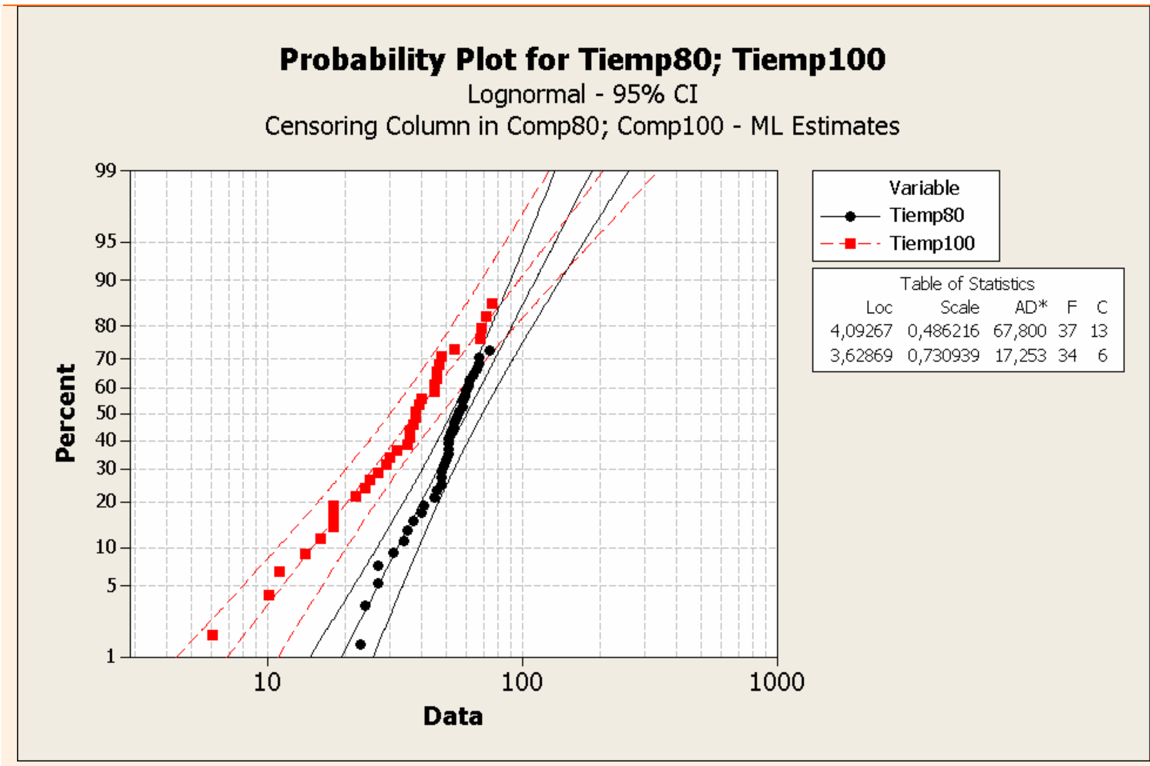
Session

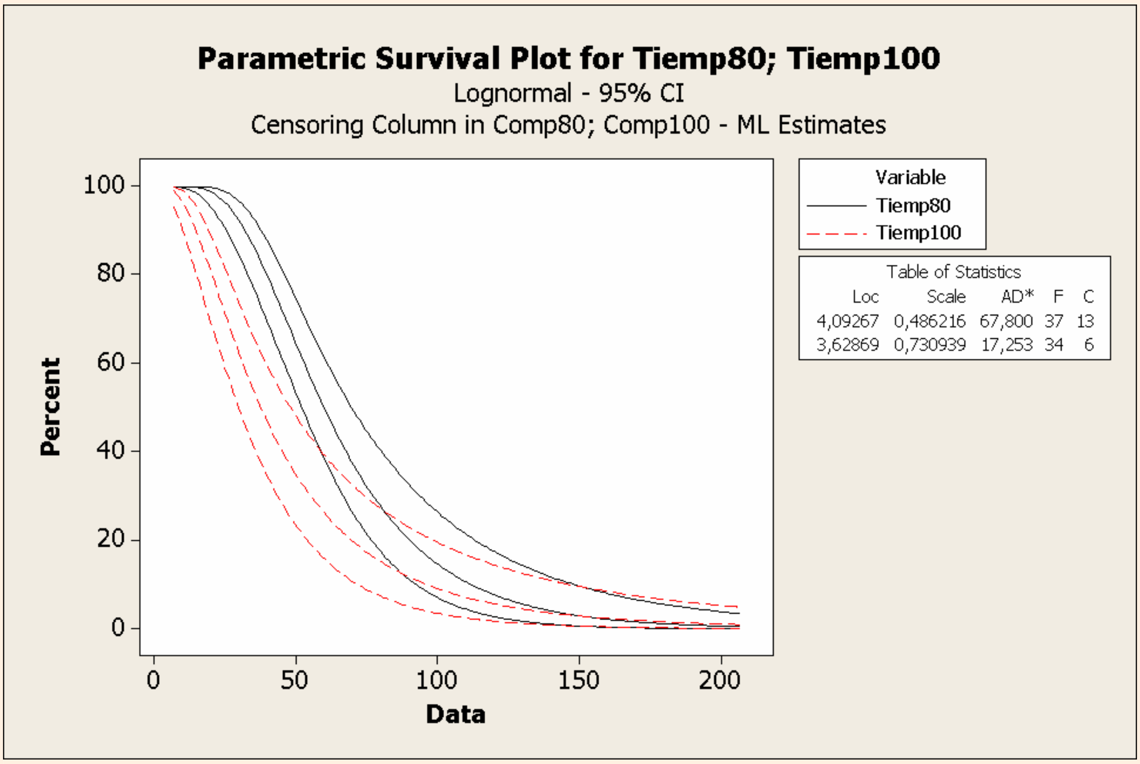
9	31,2110	3,08326	25,7170	37,8788
10	32,1225	3,09409	26,5962	38,7970
20	39,7837	3,20997	33,9646	46,5999
30	46,4184	3,41015	40,1936	53,6073
40	52,9573	3,75669	46,0833	60,8568
50	59,8995	4,31085	52,0192	68,9735
60	67,7517	5,15910	58,3584	78,6569
63,2	70,5695	5,51482	60,5478	82,2501
70	77,2958	6,45920	65,6184	91,0514
80	90,1863	8,58211	74,8412	108,678
90	111,696	12,8103	89,2100	139,849
91	114,958	13,5112	91,3052	144,738
92	118,610	14,3120	93,6288	150,255
93	122,759	15,2417	96,2426	156,581
94	127,565	16,3437	99,2372	163,979
95	133,276	17,6863	102,753	172,866
96	140,314	19,3873	107,026	183,955
97	149,477	21,6739	112,500	198,608
98	162,590	25,0764	120,175	219,977
99	185,634	31,3868	133,271	258,570

Table of Survival Probabilities

		95,0% Normal CI	
Time	Probability	Lower	Upper
70	0,374299	0,263102	0,497141

Finalmente, obtenemos los gráficos solicitados, que permiten comparar visualmente el comportamiento de los dos grupos considerados (cubiertas a 80ºC y cubiertas a 100ºC):





En el gráfico de supervivencia, se observa claramente como el factor temperatura afecta significativamente al tiempo de vida de las cubiertas (la función de supervivencia desciende más rápidamente en el caso de las cubiertas a 100ºC que en el caso de las cubiertas a 80ºC).