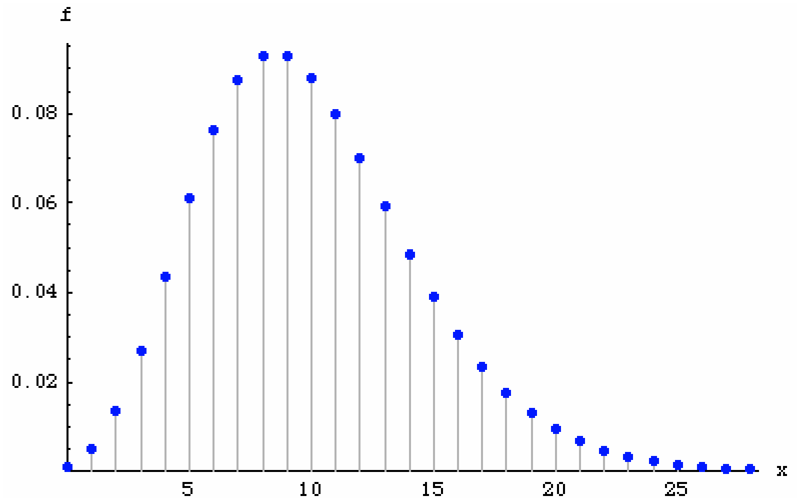
ESTADÍSTICA APLICADA

T4 Variables Aleatòries Discretes



T4 – 4.2: Variables Aleatòries

- Una variable aleatòria (v.a.) és tota aplicació $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que assigna un nombre real a cada esdeveniment elemental
- Si $X(\Omega)$ és numerable es diu que X és discreta. Si $X(\Omega)$ és no numerable es diu que X és contínua
- Exemple v.a. discreta (llançament de 3 monedes):
  - X = “nombre de cares”
  - Ω = {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++}
  - $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
- Exemple v.a. contínua (llançament de dard a diana):
  - X = “distància del dard al centre de la diana”
  - $X(\Omega) = [0, L)$ (L = radi de la diana)

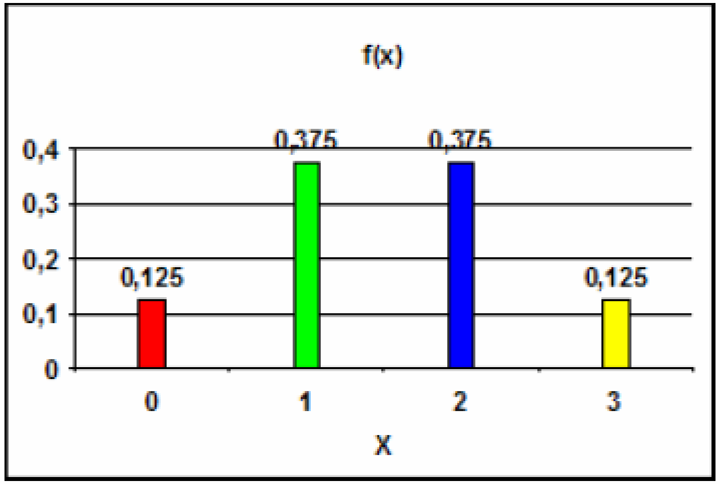
(Continua)

- La funció de probabilitat (f.p.) associada a una v.a. discreta, X, és l'aplicació f: $X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x_i) = P(X = x_i)$
- Exemple (llançament de 3 monedes):
  - X = "nombre de cares"
  - Ω = {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++}
  - $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
  - $f(0) = P(X = 0) = 1/8$

    $f(1) = P(X = 1) = 3/8$

    $f(2) = P(X = 2) = 3/8$

    $f(3) = P(X = 3) = 1/8$



- Observació: la suma de tots els valors que pren la f.p. ha de ser 1, i.e.: $\Sigma f(x_i) = 1$

(Continua)

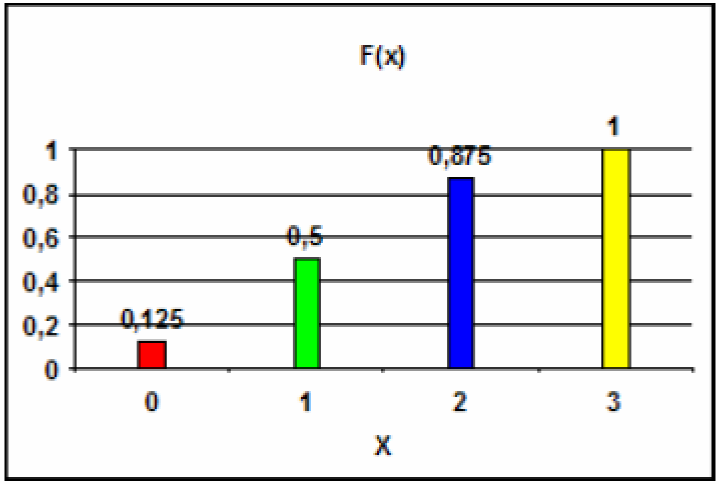
T4 – 4.2: Variables Aleatòries

- La funció de distribució (f.d.) associada a una v.a. discreta, X, és l'aplicació F: $X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ tal que $F(x_i) = P(X <= x_i)$
- Exemple (llançament de 3 monedes):
  - X = "nombre de cares"
  - Ω = {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++}
  - $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$
  - $F(0) = P(X <= 0) = 1/8$

    $F(1) = P(X <= 1) = 1/8 + 3/8 = 1/2$

    $F(2) = P(X <= 2) = \ldots = 7/8$

    $F(3) = P(X <= 3) = 1$



- Observació: la f.d. és monòtona creixent (de 0 a 1) i esglaonada

T4 – 4.3: Característiques v.a. discretes

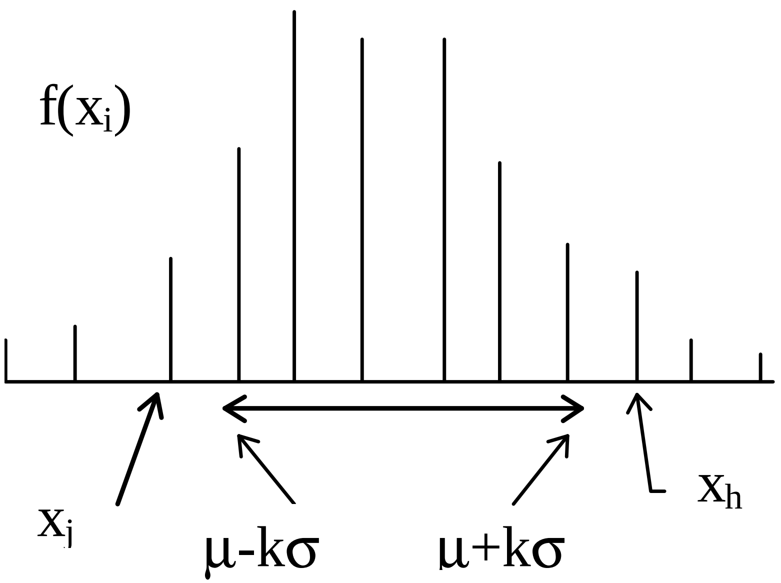
- Esperança o mitjana d'una v.a. X: $E[X] = \mu = \sum x_i \cdot f(x_i)$
- Variancia d'una v.a. X: $Var[X] = \sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$
- Desviació tipus d'una v.a. X: $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$
- Exemple (llançament de 3 monedes):
  - X = "nombre de cares"; X(Ω) = {0, 1, 2, 3}
  - f(0) = f(3) = 1/8   f(1) = f(2) = 3/8
  - $E[X] = \Sigma(x_i * f(x_i)) = 0*1/8 + 1*3/8 + 2*3/8 + 3*1/8 = 3/2 = 1.5$
  - $E[X^2] = \Sigma(x_i^2 * f(x_i)) = 0^2 *1/8 + 1^2 *3/8 + 2^2 *3/8 + 3^2 *1/8 = 3$
  - $Var[X] = 3 - 1.5^2 = 0.75 \rightarrow \sigma = 0.866$
- Observació: quan més petita sigui σ, tant més concentrats al voltant de E[X] estaran els valors x_i

(Continua)

- Teorema de Txebyshev: “és molt poc probable trobar dades que estiguin molt allunyades de la mitjana; tant menys probable quan més ens allunyem d’aquesta mitjana”

Sigui k un enter, llavors:

$$P\left(\mu - k\cdot\sigma \le X \le \mu + k\cdot\sigma\right) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$$



- Experiència Bernoulli: experiment aleatori amb 2 possibles resultats, èxit o fracàs (1/0, blanc/negre, ...), i amb probabilitat d'èxit constant p → X ~ Be(p)

- Si es realitzen n experiències Bernoulli → X seguirà una distribució binomial, i.e.: X ~ Bi(n, p)

- Si X ~ Bi(n, p) i k = nombre d'èxits en les n proves, llavors:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}-(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 \qquad 0!=1!=1$$

- Si X ~ Bi(n, p) → $E[X]=n\cdot p \quad Var[X]=n\cdot p\cdot(1-p)$

(Continua)

Ejemplo 5: Distribución binomial.

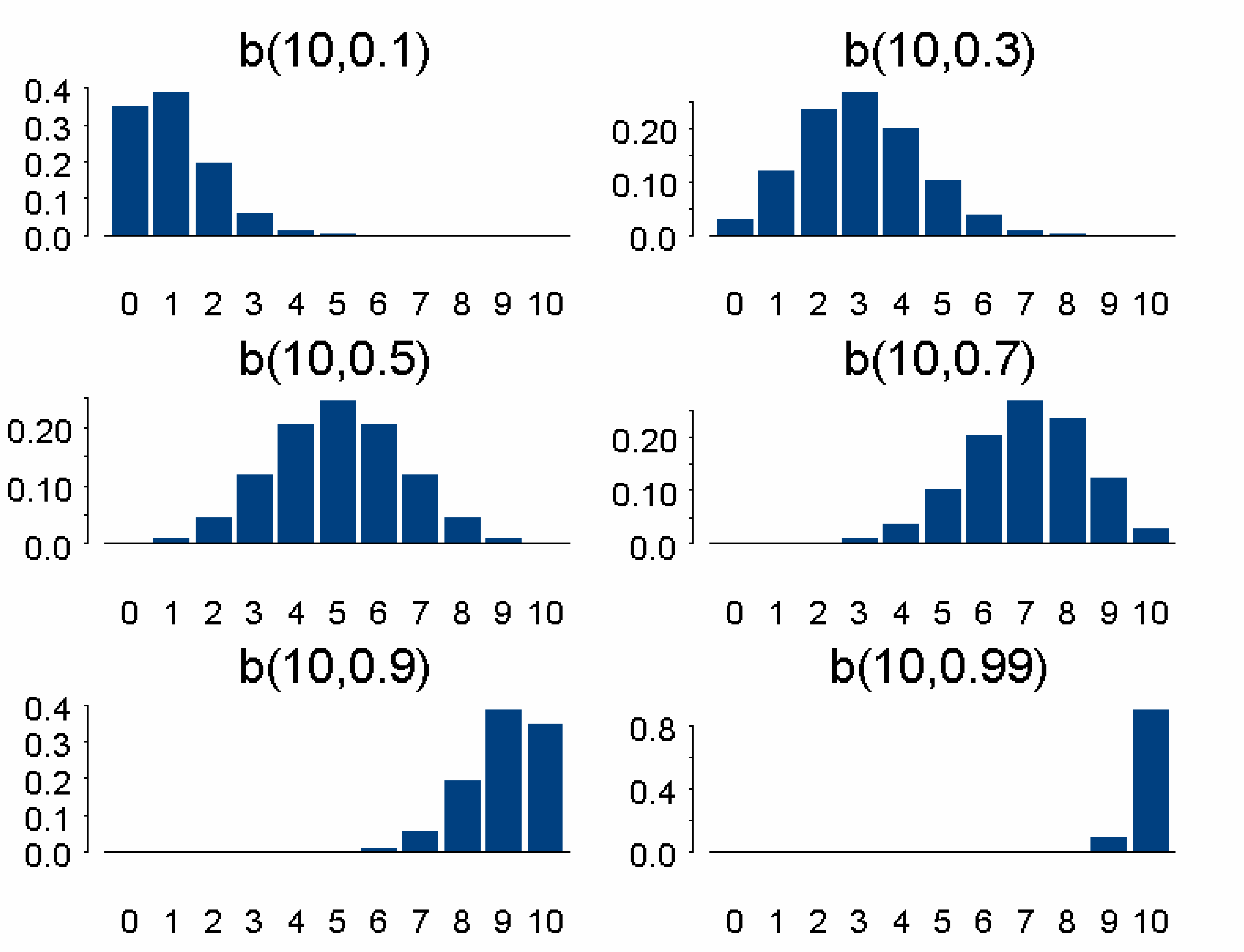
Queremos estudiar la probabilidad de que, al lanzar 5 veces un dado, se obtenga exactamente tres veces 1 punto. La experiencia de Bernoulli consiste en observar si aparece "1" o no al lanzar el dado. Por tanto si A="se ha obtenido 1 al lanzar el dado", p(A)=1/6=p. Como que realizamos la experiencia de Bernoulli 5 veces es n=5. La variable aleatoria X="nº de veces que obtenemos 1" sigue pues una distribución binomial B(5,1/6) y, por tanto,

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=0.032$$

(Continua)

T4 – 4.4: Distribució binomial

MA1 EPSEB



T4 – 4.5: Distribució de Poisson

- Experiència de Poisson: experiment aleatori consistent en enregistrar el moment en que es dona un esdeveniment puntual i independent en un interval continu de temps (p.e.: arribada d'un cotxe a un peatge, arribada d'una petició a un servidor web, aparició d'una fallida en una estructura, ...)

- En una experiència de Poisson, si anomenem X = "nombre d'ocurrències en un interval determinat", aquesta v.a. segueix una distribució de Poisson de paràmetre λ, on λ és la mitjana d'ocurrències per unitat de temps, i.e.: $X \sim Po(\lambda)$ (p.e.: nombre de cotxes que arriben al llarg de 3 hores, nombre de clients que arriben al llarg d'un matí, ...)

- Si $X \sim Po(\lambda)$ i k és un natural, llavors:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad E[X] = Var[X] = \lambda$$

(Continua)

Ejemplo 6: Una experiencia de Poisson.

Una persona hace 4 errores por página, de media, al mecanografiar un texto. ¿Cual es la probabilidad de que en la próxima página haga

a) 4 o más errores?

Sea la variable aleatoria X ="número de errores al mecanografiar una página". Su distribución de probabilidad vendrá dada por una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 4$.

Calculemos $P(X>3)$:

$$P(X>3) = 1 - P(X<4) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\right] =$$

$$1 - \left[e^{-4}\frac{4^0}{0!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!} + e^{-4}\frac{4^2}{2!} + e^{-4}\frac{4^3}{3!}\right] = 1 - e^{-4}\left(1 + 4 + 8 + {}^{64}\!/_{6}\right) = 0{,}5665$$

b) ningún error?

$$P(X=0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = e^{-4} = 0{,}0183$$

(Continua)

T4 – 4.5: Distribució de Poisson

MA1 EPSEB

- Aproximació d'una binomial per una Poisson:

Si $n \to \infty$ i $p \to 0$, llavors: $Bi(n, p) \approx Po(n*p)$