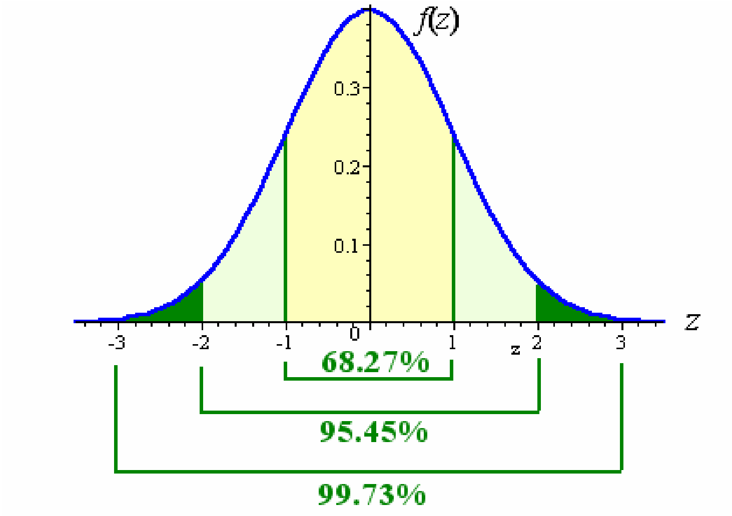
ESTADÍSTICA APLICADA

T5 Variables Aleatòries Contínues

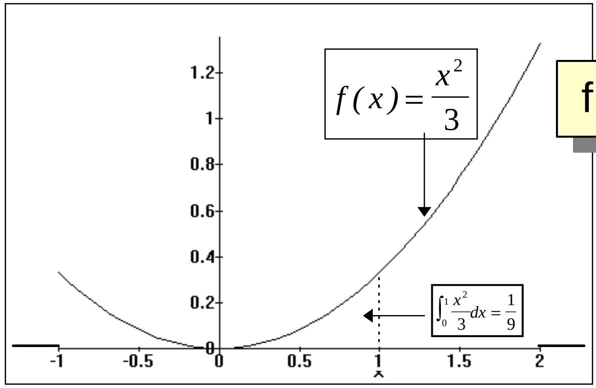


T5 – 5.2: Distribució de Probabilitat

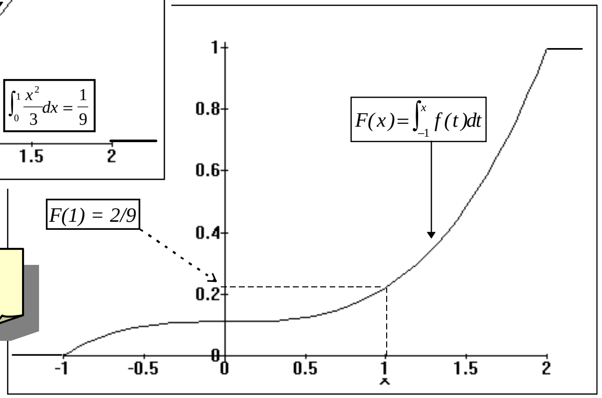
MA1

- Obs.: si X és una v.a. contínua → P(X = x) = 0
- La funció de densitat de probabilitat (f.d.p.) associada a una v.a. contínua, X, és l'aplicació f: IR → IR tal que:
  - $f(x) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$
  - $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$

Probabilitat = Àrea



f.d.p. f(x)



f.d. F(x)

- Obs.: Si X contínua → P(a < X < b) = P(a<= X <= b)
- La funció de distribució (f.d.) associada a una v.a. contínua, X, és l'aplicació F: IR → [0, 1] tal que F(x) = P(X <= x)

T5 – 5.3: Característiques v.a. contínues

MA1

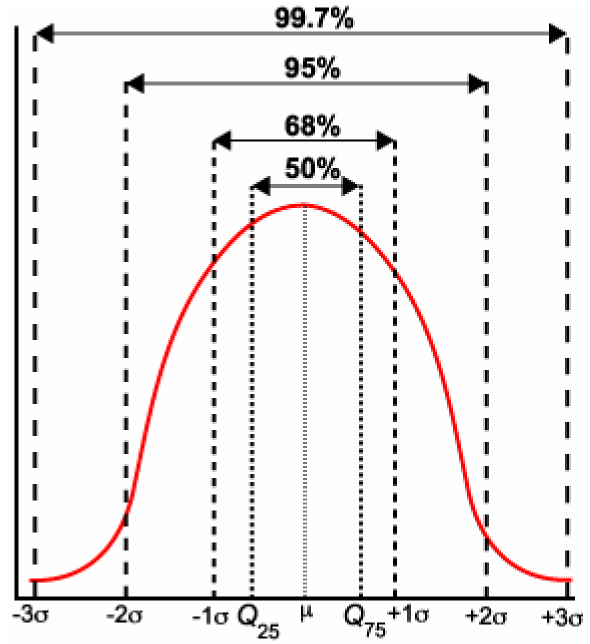
- Esperança o mitjana d'una v.a. X: $E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$
- Variancia d'una v.a. X: $Var[X] = \sigma^2 = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2$
- Desviació tipus d'una v.a. X: $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$
- Propietats:
  - $E[aX + b] = a\,E[X] + b$
  - $Var[aX + b] = a^2\,Var[X]$
- Observació: quan més petita sigui σ, tant més concentrats al voltant de E[X] estaran els valors x_i
- Tma. Txebyshev: $\mathrm{P}\left(\mu - k \cdot \sigma \le X \le \mu + k \cdot \sigma\right) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$

T5 – 5.5: Distribució normal

MA1

- Una v.a. X segueix una distribució normal de mitjana μ i desviació tipus σ, N(μ, σ), si la seva f.d.p. és de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$



- N(μ,σ) és simètrica i centrada en μ:

$$E[X] = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2$$

- Regla 68-95-99: en una N(μ,σ) aprox. el 68% de la distribució està a μ±σ, el 95% a μ±2σ i el 99% a μ±3σ

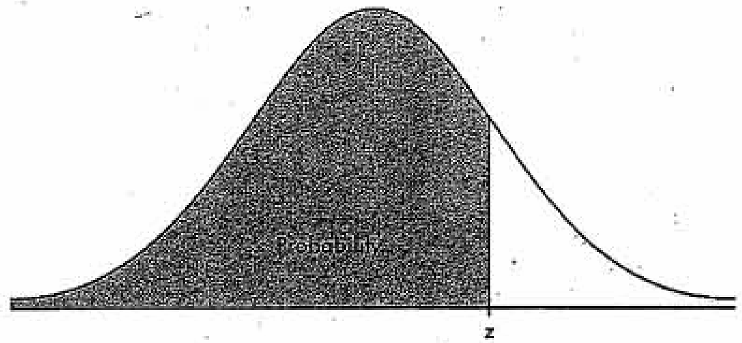
(Continua)

T5 – 5.5: Distribució normal

- Una v.a. X segueix una distribució normal tipificada, N(0, 1), si

  $X \sim N(\mu, \sigma)$ amb

  $\mu = 0$ i $\sigma = 1$



P(Z < 0.33) = 0.6293

ABILITIES (CONTINUED)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1								.8790	.8810	.8830
1.2								.8980	.8997	.9015

Recorda!:

1. P(Z < -z) = P(Z > z)
2. P(Z > z) = 1 – P(Z < z)

- Propietats:
  - Existeix una taula per calcular probabilitats d'una N(0, 1) (pàg. 196)
  - Procés de tipificació:

    si $X \sim N(\mu, \sigma) \rightarrow$

    $Z = (X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$

(Continua)

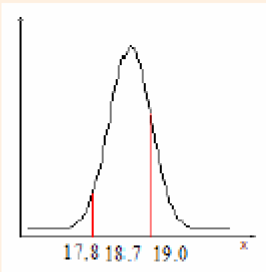
T5 – 5.5: Distribució normal

Ejemplo 10: Resistencia del hormigón y ley normal

Una planta de fabricación de hormigón realiza una producción que sigue una ley normal de media 18,7 N/mm² y desviación tipo 0,9 N/mm².

- **a)** Calcular la probabilidad de que la resistencia del hormigón esté comprendida entre 17,8 y 19,0 N/mm2.
- **b)** Calcular la resistencia mínima del hormigón que se puede garantizar con un riesgo de error del 5% (resistencia característica).
- **c)** Entre que valores simétricos respecto a la media estará comprendida la resistencia del hormigón en el 80% de los casos.
- **d)** Probabilidad de que el hormigón tenga una resistencia inferior a 17,5 N/mm2.

a) $P(17{,}8 \le x \le 19{,}0) = P(z_1 \le z \le z_2)$



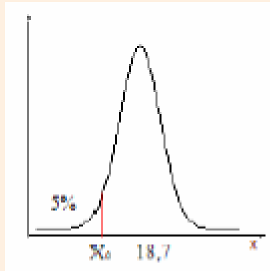
$$z_1 = \frac{17{,}8 - 18{,}7}{0{,}9} = -1$$

$$z_2 = \frac{19{,}0 - 18{,}7}{0{,}9} = 0{,}33$$

Para Z=+1, en las tablas tenemos S=0,8413
Para z=+0.33, en las tablas tenemos S= 0,6293
La probabilidad pedida es 0,6293 - (1 - 0,8413) = 0,4696

b) La resistencia cilíndrica del hormigón a los 28 días es una variable aleatoria que sigue una ley normal.

Las normas actuales del hormigón definen la resistencia característica como aquel valor por debajo del cual solo se observa el 5% de la distribución. Es decir, solo hay un 5% de casos con una resistencia inferior a la característica. Dicho de otra forma, con una garantía del 95% podemos afirmar que la resistencia del hormigón está por encima de la resistencia característica.



$$P(x \le x_0) = 5\%$$

Para S=5% en las tablas hallamos z=-1,645 (en realidad hemos hallado que para S =0,95 , z=+1,645).
Por tanto:

$$x_0 = \mu + \sigma z = 18{,}7 - 1{,}645 \cdot 0{,}9 = 17{,}2195 N/mm^2$$

(Continua)

T5 – 5.5: Distribució normal

Ejemplo 10: Resistencia del hormigón y ley normal

Una planta de fabricación de hormigón realiza una producción que sigue una ley normal de media 18,7 N/mm² y desviación tipo 0,9 N/mm².

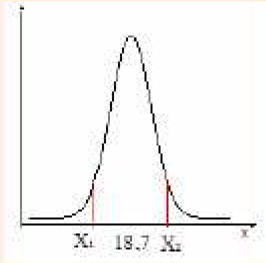
a) Calcular la probabilidad de que la resistencia del hormigón esté comprendida entre 17,8 y 19,0 N/mm2.

b) Calcular la resistencia mínima del hormigón que se puede garantizar con un riesgo de error del 5% (resistencia característica).

c) Entre que valores simétricos respecto a la media estará comprendida la resistencia del hormigón en el 80% de los casos.

d) Probabilidad de que el hormigón tenga una resistencia inferior a 17,5 N/mm2.

c)

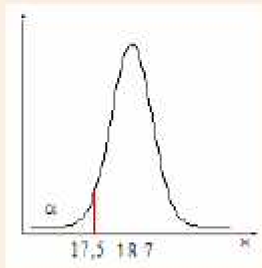


Busquemos x1 y x2 de forma que P(x1 < x < x2) = 0,80 y que $x_2 - \mu = \mu - x_1$.
En las tablas para S=0,5+0,8/2=0,9 tenemos z=1,28.

$$x_1 = \mu - 1.28\sigma = 18{,}7 - 1.28 \cdot 0{,}9 = 17{,}548 N/mm^2$$

$$x_2 = \mu + 1.28\sigma = 18{,}7 + 1.28 \cdot 0{,}9 = 19{,}852 N/mm^2$$

d)



Busquemos $P(x \le 175) = \alpha$

$$z = \frac{17{,}5 - 18{,}7}{0{,}9} = -1{,}33$$

Para z=1,33 S=0,9082 y por tanto α= 1- 0,9082 =0,0918=9,18%

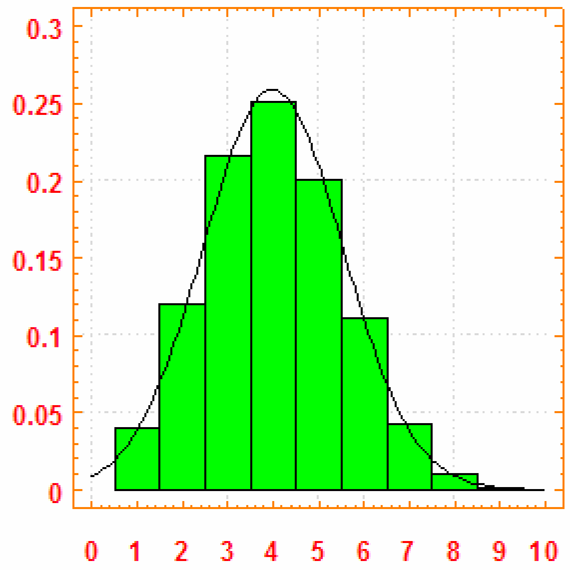
T5 – 5.6: Aproximació binomial per normal

MA1

- Aproximació d'una binomial per una normal:

  Si $n \rightarrow \infty$ llavors: $Bi(n, p) \approx N(\ n*p,\ \sqrt{(n*p*(1-p))}\ )$

- Obs.: l'aproximació és tant millor quan: (a) més gran sigui n, i (b) més pròxim sigui p a 0.5



- Correcció del mig punt: Si $X \sim Bi(n, p)$ amb n gran, llavors:

$$P(a <= X_{bin} <= b) \approx P(a-0.5 < X_{nor} < b+0.5)$$

(Continua)

T5 – 5.6: Aproximació binomial per normal

MA1

Ejemplo 11: Aproximación de la ley binomial

Si tenemos una ley binomial con n = 16 y p = 0,5: B(16; 0,5), para X = 8 tendremos

$$P(X=8) = \binom{16}{8}(0{,}5)^8(0{,}5)^8 = 0{,}196$$

Si aproximamos con una ley normal tendremos

$$\mu = np = 16 \cdot 0{,}5 = 8$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 16 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 4$$

$$P(X=8) = \int_{7,5}^{8,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2} e^{-\frac{(x-8)^2}{2 \cdot 4}} dx = \int_{-0,25}^{0,25} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

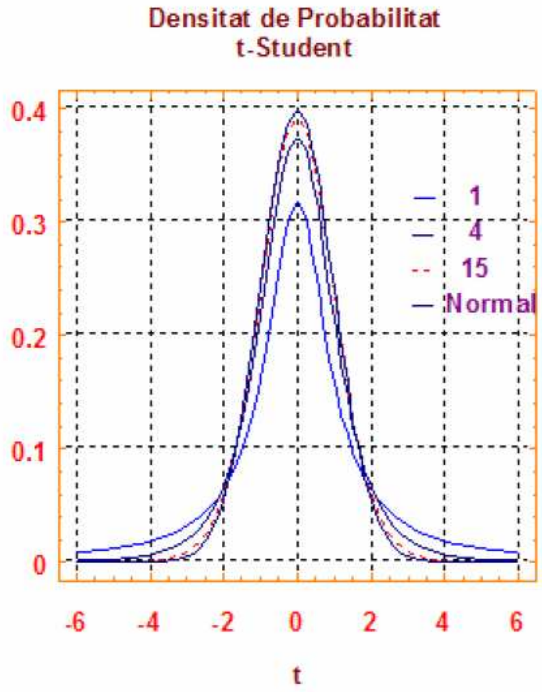
$$\tilde{a} = \frac{7{,}5-8}{2} = -0{,}25$$

$$\tilde{b} = \frac{8{,}5-8}{2} = 0{,}25$$

$$P(X=8) = F(\tilde{b}) - F(\tilde{a}) = 0{,}5987 - 0{,}4013 = 0{,}1974$$

T5 – 5.8: Distribució t-Student

- Les t-Student, són una família de distribucions:



- Propietats:
  - Són simètriques respecte de la seva mitjana, el 0
  - Cada t-Student, t(n), ve definida pel paràmetre n = graus de llibertat
  - Aproximació per una normal: si $n \rightarrow \infty$ llavors $t(n) \approx N(0, 1)$
  - Existeix una taula per calcular probabilitats d'una t(n) (pàg. 197)

(Continua)

T5 – 5.8: Distribució t-Student

MA1

Ejemplo 13: Cálculo de áreas bajo la distribución t.

a) Una variable aleatoria que sigue una distribución t-Studen t de 15 grados de libertad nos ha dado el valor de 2,602. Calcular P(|t|>2,602).

Haciendo uso de las tablas del Apéndice tenemos que para la fila correspondiente a 15 grados de libertad al valor 2,602 le corresponde la probabilidad 0,02 indicada a la cabecera de la columna y por lo tanto:

$$P(|t| > 2{,}602) = 0{,}02$$

b) Supongamos que tenemos una variable aleatoria X que sigue una t-Student de 20 grados de libertad y que estamos interesados en calcular el valor de la variable X, pongamos ta, para que P(X>ta) sea igual a 2,5%.

Utilizando las tablas tenemos que resolver la igualdad

$$P(t > t_a) = 0{,}025$$

Por simetría de la distribución esto es equivalente a

$$P(t > t_a) = \frac{1}{2} P(|t| > t_a) = 0{,}025$$

Es decir $P(|t| > t_a) = 0{,}05$

Consultando directamente las tablas obtenemos el valor t_a=2,086.

c) Supongamos que X es la variable aleatoria definida a la Definición 13 en la que la variable aleatoria del radicando del denominador es el resultado de la suma de los cuadrados de 250 observaciones independientes de una distribución N(0,1). ¿Cuál es la probabilidad que la variable X, en valor absoluto, no sobrepase el valor de 1,96?

De acuerdo con la definición 13, X sigue una distribución t-Student con 250 grados de libertad, que se puede aproximar por una Z – N(0,1) por su gran número de grados de libertad.

Así pues, utilizando las tablas de la distribución normal,

$$P(|X| \le 1{,}96) \cong P(|Z| \le 1{,}96) = P(Z \le 1{,}96) - P(Z < -1{,}96) =$$
$$= P(Z \le 1{,}96) - (1 - P(Z \le 1{,}96)) = 2 \cdot P(Z \le 1{,}96) - 1 = 2 \cdot 0{,}975 - 1 = 0{,}95$$