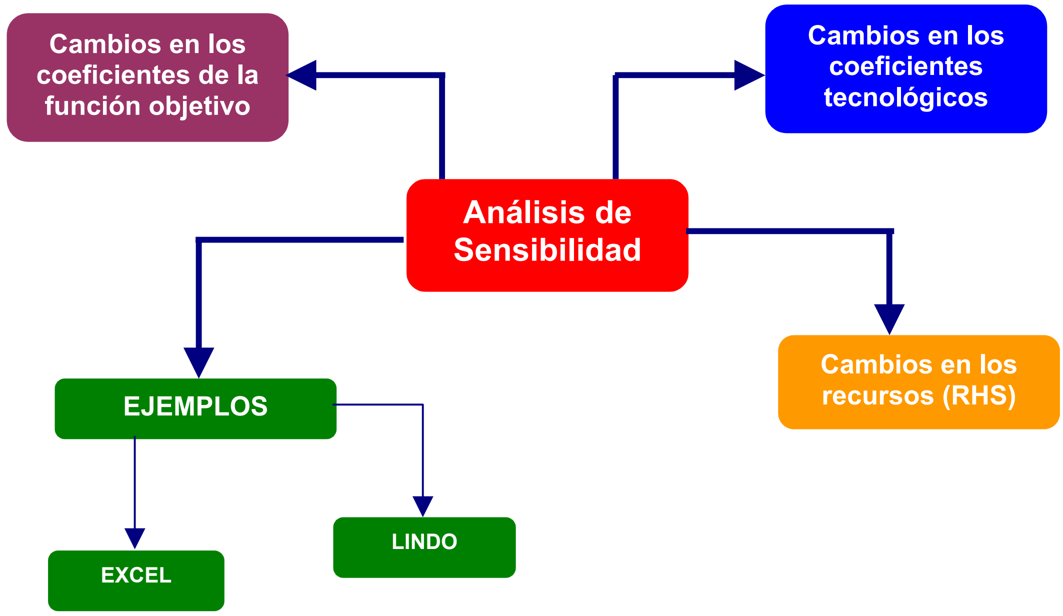
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD CON EXCEL Y LINDO

Autores: Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu), Javier Faulín (ffaulin@uoc.edu)

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

En el mundo real, las condiciones de trabajo no suelen permanecer estáticas, sino en continuo estado de cambio. Así las cosas, son usuales las variaciones en los precios (tanto de productos finales como de materias primas, mano de obra, etc.), y en las cantidades de recursos disponibles. Además, continuamente se producen cambios en los métodos productivos y mejoras tecnológicas que logran aumentar la productividad. El **Análisis de Sensibilidad** (o de Post-optimalidad) se encarga precisamente de estudiar cómo afectaría a la solución óptima obtenida y a la función objetivo el cambio (dentro de un rango predeterminado) de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes. Por ejemplo, si nuestros contables estiman al revisar los cálculos que los beneficios por cada unidad de producto vendida son de 5,5 € en vez de la estimación inicial de 5 €, o si resulta que ahora disponemos de recursos adicionales (cómo diez horas más de mano de obra, o de una nueva máquina), el Análisis de Sensibilidad nos ayudará a conocer cómo afectarán estos cambios a la solución óptima obtenida y a los beneficios totales. Conviene hacer notar que este tipo de análisis tan sólo tiene sentido para modelos lineales no enteros (no se usa en modelos enteros ni cuadráticos).

OBJETIVOS

- Introducirse en los conceptos propios del análisis de sensibilidad, los cuales responden a la pregunta: ¿qué ocurriría con la solución óptima si variamos alguna de las condiciones iniciales…?
- Aprender a interpretar los “outputs” de Excel y LINDO en relación al análisis de sensibilidad.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Previo a este *math-block*, es conveniente haber trabajado los *math-blocks* siguientes: **Introducción a la Investigación Operativa**, **PL - PLE con Excel y LINDO** y **Aplicaciones de la PL**.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y CASOS CON SOFTWARE

Conceptos básicos en Análisis de Sensibilidad

El Análisis de Sensibilidad se utiliza para examinar los efectos de cambios en tres áreas diferenciadas del problema:

(1) Los ***coeficientes de la función objetivo*** (**coeficientes objetivo**). Los cambios en los coeficientes objetivos NO afectan la forma de la región factible, por lo que no afectarán a la solución óptima (aunque sí al valor de la función objetivo).

(2) Los **coeficientes tecnológicos** (aquellos coeficientes que afectan a las variables de las restricciones, situados a la izquierda de la desigualdad). Los cambios en estos coeficientes provocarán cambios sustanciales en la forma de la región factible. Gráficamente (en el caso de 2 variables) lo que varía es la pendiente de las rectas que representan las restricciones.

(3) Los ***recursos disponibles*** (los términos independientes de cada restricción, situados a la derecha de la desigualdad). Intuitivamente (para 2 variables), los cambios en el *RHS* suponen desplazamientos paralelos de las rectas asociadas a las restricciones, lo cual hará variar la forma de la región factible y, con ello, a la solución óptima.

```
                    Coeficientes Objetivo

MAX    10 X + 20 Y                         Recursos
ST                                           (RHS)
         3 X + 1 Y   >= 9
         1 X - 3 Y   >= 5

Coeficientes Tecnológicos
```

Se observa rápidamente que el Análisis de Sensibilidad está íntimamente relacionado con lo que en el mundo de las hojas de cálculo (Excel, Lotus 123, etc.) se conoce como **Análisis de Escenarios** o “*what-if analysis*”: ¿Qué ocurriría si el beneficio producido por la línea de artículos B aumentase en un 10%?, ¿Qué sucedería si los trabajadores hiciesen una hora extra retribuida un 50% más que una normal?, etc. Así, vemos cómo el Análisis de Sensibilidad no sólo tiene que ver con el estudio de la robustez de la solución frente a posibles errores en el cálculo de los coeficientes y recursos disponibles, sino que también puede ser de gran ayuda a la hora de valorar futuras estrategias de desarrollo y mejora de una empresa.

Hay dos maneras de estudiar la “sensibilidad” de una solución respecto a cambios en alguna de las áreas antes mencionadas. La primera de ellas sería volver a resolver todo el problema cada vez que alguno de los datos originales se haya modificado. Obviamente, utilizando este método, podría llevar bastante tiempo determinar todas las variantes cuando nos encontremos ante un conjunto amplio de posibles cambios. La otra forma (Análisis de Sensibilidad) consistiría en, una vez resuelto un problema, analizar cómo afectaría a la solución obtenida y al valor de la función objetivo la variación dentro de un rango “tolerable”, de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes. Por supuesto, en caso de que queramos estudiar los efectos de la variación de más de un parámetro (o de un parámetro más allá del “rango de tolerancia”) deberemos reprogramar el problema.

Análisis de Sensibilidad con LINDO

Ejemplo: Supongamos que una empresa produce dos líneas de productos distintos y utiliza LINDO para resolver el siguiente problema de PL:

```
MAX          50X + 120Y
ST
             2X + 4Y <= 80
             3X +  Y <= 60
END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      2400.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X         0.000000         10.000000

         Y        20.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         30.000000
        3)        40.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=        1
```

Cantidad en que tendría que “mejorar” (aumentar en un MAX, disminuir en un MIN) el coeficiente objetivo asociado para que resultase “rentable” asignar un valor no nulo a la variable.

Nos dice cuan cerca estamos (en unidades) de “agotar” la restricción asociada (cumplirla en igualdad). Si es del tipo <= será un “Slack” y si es del tipo >=, un “Surplus”.

Cantidad en que “mejoraría” la función objetivo (aumentando en un MAX, disminuyendo en un MIN) si “relajásemos” la restricción asociada en una unidad.

Aparte de observar el valor de la solución óptima (X = 0, Y = 20), y el consiguiente valor de la función objetivo (2.400), nos interesa ahora destacar el resto de la información que se nos proporciona y que se explica en los cuadros anteriores. Así, utilizando la columna de **coste reducido**, sabemos que, en la solución final, la variable X no tomará un valor estrictamente positivo a menos que su coeficiente objetivo aumente en más de 10 unidades (es decir, pase de ser 50 a ser mayor de 60); a partir de la columna de **carencia** o **excedente** (*Slack or Surplus*), deducimos que la primera de las restricciones se cumple en igualdad (agotamos las 80 unidades disponibles), mientras que en la segunda estamos utilizando 40 unidades menos de las permitidas (hay una carencia de 40 unidades). Finalmente, el **precio dual** (o **precio sombra**) toma un valor de 30 en la primera de las restricciones, lo que significa que nos saldría rentable pagar hasta 30 unidades más por “relajar” esta restricción en una unidad (disponer de 81 unidades en vez de 80) siempre que los demás parámetros sigan fijos. Como es lógico, el precio dual de la segunda restricción es 0, puesto que no nos saldría a cuenta pagar por otra unidad de un recurso que no hemos agotado.

Veamos ahora cuál sería el “output” extra del programa al escoger la opción **SENSIBILITY (RANGE) ANALYSIS** (opción también seleccionable desde la barra de menú como **`Reports>Range`**):

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                              OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE          CURRENT          ALLOWABLE         ALLOWABLE
                    COEF            INCREASE          DECREASE
        X        50.000000        10.000000          INFINITY
        Y       120.000000         INFINITY         20.000000

                              RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW          CURRENT          ALLOWABLE         ALLOWABLE
                     RHS            INCREASE          DECREASE
        2        80.000000       160.000000         80.000000
        3        60.000000         INFINITY         40.000000
```

Cantidad máxima en que podemos aumentar/disminuir los coeficientes objetivo sin variar la solución óptima

Cantidad máxima en que podemos aumentar/disminuir los recursos disponibles sin variar la solución

(1) **Cambios en los Coeficientes Objetivo:** Distinguiremos entre **variables básicas**, que son las que toman valores no nulos en la solución óptima (Y en nuestro ejemplo), y **variables no básicas**, las cuales toman el valor 0 (X en este caso). Por lo que respecta al coeficiente objetivo asociado a la variable no básica (50), la solución actual (X = 0, Y = 20) seguirá siendo válida siempre que éste no exceda de 60 (su incremento permitido es de 10 unidades); si este coeficiente excediese de 60, la variable pasaría a ser básica, cambiando así la sol. óptima. Por lo que respecta al coeficiente objetivo asociado a la variable básica (120), la solución actual será válida siempre que éste no disminuya en más de 20 unidades.

Observar que, dentro de los rangos especificados, los cambios en uno de los coeficientes objetivo no alterarán la solución óptima, pero sí harán variar el valor final de la función objetivo.

(2) **Cambios en los Coeficientes Tecnológicos:** Estos cambios se deben a menudo a innovaciones tecnológicas o a mejoras en la productividad. Este tipo de cambios no producirá variación alguna en la función objetivo, pero sí alterará sustancialmente la “forma” de la región factible, por lo que la solución óptima también variará. Su análisis puede llegar a ser muy complejo, motivo por el cual lo omitiremos.

(3) **Cambios en los recursos:** Los valores que quedan a la derecha de las desigualdades (***Right-Hand-Side***) representan la disponibilidad de recursos de la empresa (horas de mano de obra, materias primas, etc.). Los cambios que se puedan producir en estos valores afectarán también a la “forma” de la región factible y, por extensión, al valor de la solución óptima. A pesar de ello, si el parámetro que varía lo hace dentro de un rango predeterminado, seremos capaces de predecir (vía precios sombra) cómo este cambio afectará a la función objetivo, pues la **base** (conjunto de variables básicas de la solución) no variará.

Como ya hemos comentado, el precio dual asociado a una restricción nos informa de cuánto mejoraría el valor de la función objetivo si relajásemos la restricción en una unidad. Ello nos da una idea de la cantidad que estaríamos dispuestos a pagar por cada unidad adicional del recurso asociado. Por supuesto, no es posible seguir aumentando indefinidamente los recursos disponibles sin que ello afecte a la clasificación actual de variables básicas y no básicas. La información que el “output” nos proporciona es, precisamente, el rango en el cual este precio sombra es válido. Así, en la primera de las restricciones anteriores, podríamos aumentar los recursos disponibles hasta un total de 240 unidades (80+160), incrementando con ello el valor de la función objetivo en unas 4.800 unidades (160*30).

Ejemplo: Queremos resolver el siguiente problema de PL referido a una compañía que produce dos tipos de lanchas acuáticas:

```
Maximizar beneficios = 30 X1 + 80 X2
Sujeto a:
          2 X1 + 4 X2 <= 1.000   (horas de mano de obra disponibles)
          6 X1 + 2 X2 <= 1.200   (kg. de materia prima disponibles)
                      X2 <= 200  (motores de lancha tipo 2 disponibles)
                 X1, X2 >= 0
```

(a) ¿Cuál es la mejor combinación productiva? ¿Cuál es el beneficio máximo?.
(b) ¿Cuánto valen los precios sombra? Una vez alcanzada la solución óptima, ¿qué recurso tiene un valor marginal más elevado?.
(c) Para cada recurso, ¿cuál es el rango de tolerancia en el que son válidos los precios sombra?.
(d) ¿Cuáles son los rangos de tolerancia en que pueden variar los coeficientes objetivo?.
(e) Plantear y resolver el problema dual.

Al plantear este problema en el programa LINDO, éste nos ofrece el siguiente "output":

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)       19000.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1       100.000000          0.000000
        X2       200.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         15.000000
        3)       200.000000          0.000000
        4)         0.000000         20.000000

 NO. ITERATIONS=       2


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
       X1       30.000000        10.000000        30.000000
       X2       80.000000         INFINITY        20.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE         DECREASE
        2      1000.000000       66.666664       200.000000
        3      1200.000000        INFINITY       200.000000
        4       200.000000       50.000000        20.000000
```

(a) Se observa en el "output" que lo óptimo será producir 100 lanchas de tipo 1 y 200 de tipo 2, lo cual nos proporcionará unos beneficios de 19.000 €.

(b) El precio dual de la primera restricción es de 15, lo cual significa que estaríamos dispuestos a pagar hasta 15 € por disponer de una hora más de mano de obra. El precio dual de la segunda restricción es 0, lo cual resulta lógico dado que no agotamos toda la materia prima disponible (en el óptimo aún nos sobran 200 kg.). Finalmente, estaríamos dispuestos a pagar hasta 20 € por disponer de un motor adicional de tipo 2, lo que convierte este recurso en el de mayor valor marginal.

(c) Los precios sombra anteriores son válidos en los rangos establecidos por el "output". Así, por ejemplo, nuestros beneficios aumentarían en 15 € por cada hora extra de que dispusiésemos hasta un máximo de 1.066,67 horas, cifra a partir de la cual deberíamos replantear el problema para poder hacer un análisis correcto. Por otro lado, perderemos 15 € por cada hora que se deduzca de las disponibles inicialmente (1.000) hasta un máximo de 200 horas deducidas (a partir de aquí cabría reprogramar).

(d) El coeficiente de X1 puede variar entre 0 y 40 euros sin que por ello cambie la solución óptima (aunque sí los beneficios obtenidos, claro). Por su parte, el coeficiente de X2 podría variar entre 60 e infinito.

(e) El problema dual sería:

```
Min   1000 U1 + 1200 U2 + 200 U3
Sujeto a:
                  2 U1 + 6 U2          >= 30
                  4 U1 + 2 U2 + U3 >= 80
                       U1, U2, U3 >= 0
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      19000.00

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        U1        15.000000          0.000000
        U2         0.000000        200.000000
        U3        20.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000       -100.000000
        3)         0.000000       -200.000000

NO. ITERATIONS=      1
```

Como se esperaba, la solución del dual son los precios sombra del primal. Análogamente, los precios sombra del dual (en valor absoluto) coinciden con la solución del primal.

Ejemplos Análisis de Sensibilidad con Excel

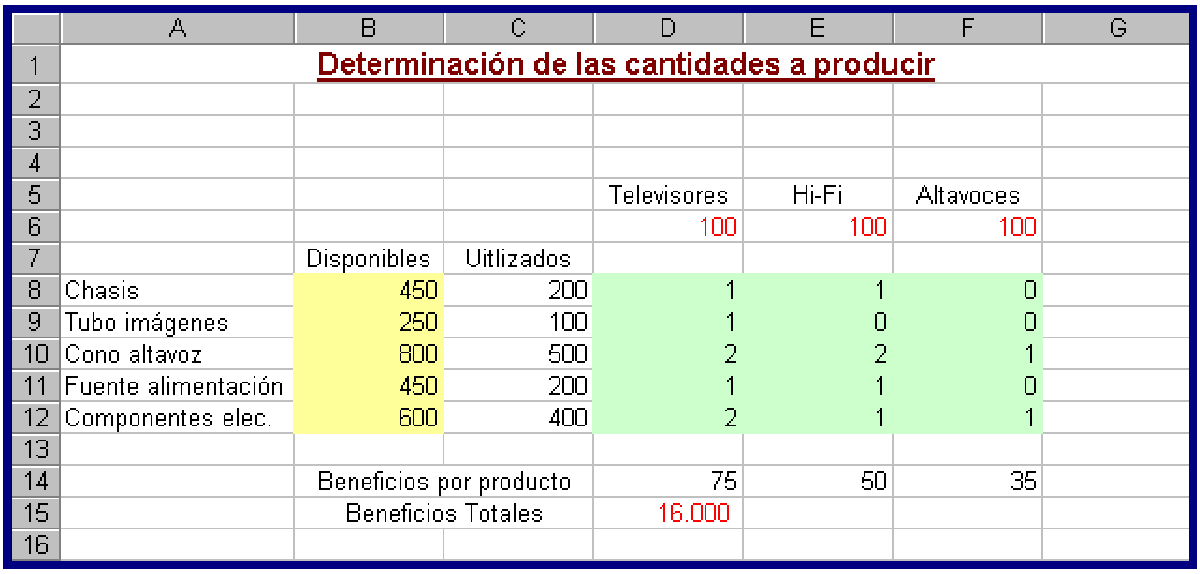
Ejemplo 1: Compañía de producción de televisores.

Una compañía produce televisores, equipos Hi-Fi y altavoces utilizando una serie de componentes comunes, tal y como se indica en la tabla inferior.

Estos componentes están disponibles en cantidades limitadas, por lo que se trata de plantear el problema de maximización restringida de beneficios sabiendo que la contribución neta de los tres productos es, respectivamente, de 75 €, 50 €, y 35 €.

	Televisor	Hi-Fi	Altavoces	Disponibilidad
Chasis	1		0	450
Tubo de imágenes	1		0	250
Conos de altavoces	2		1	800
Fuente de alimentación	1		0	450
Componentes electrónicos	2		1	600

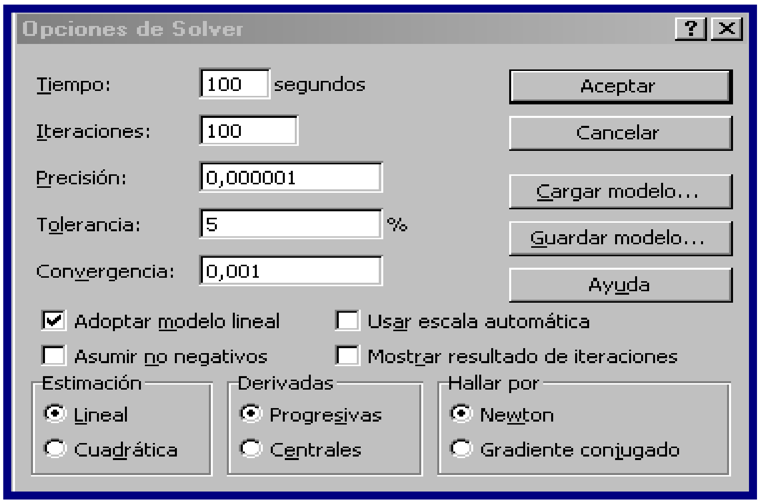
El primer paso sería plantear el problema en la hoja de cálculo:



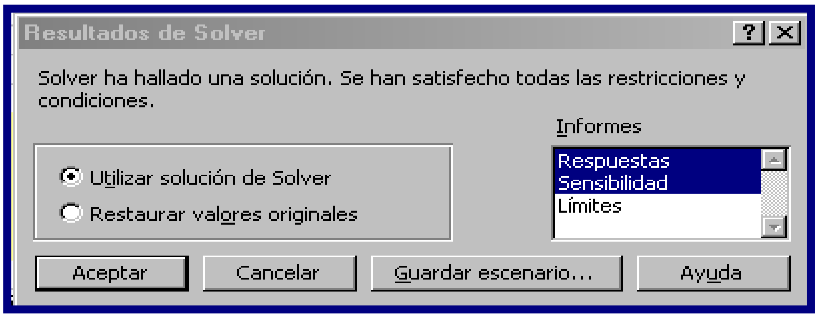
	A	B	C	D	E	F	G
1	Determinación de las cantidades a producir						
2							
3							
4							
5				Televisores	Hi-Fi	Altavoces	
6				100	100	100	
7		Disponibles	Uitlizados				
8	Chasis	450	200	1	1	0	
9	Tubo imágenes	250	100	1	0	0	
10	Cono altavoz	800	500	2	2	1	
11	Fuente alimentación	450	200	1	1	0	
12	Componentes elec.	600	400	2	1	1	
13							
14		Beneficios por producto		75	50	35	
15		Beneficios Totales		16.000			
16							

El menú de diálogo de Solver nos quedará algo así:

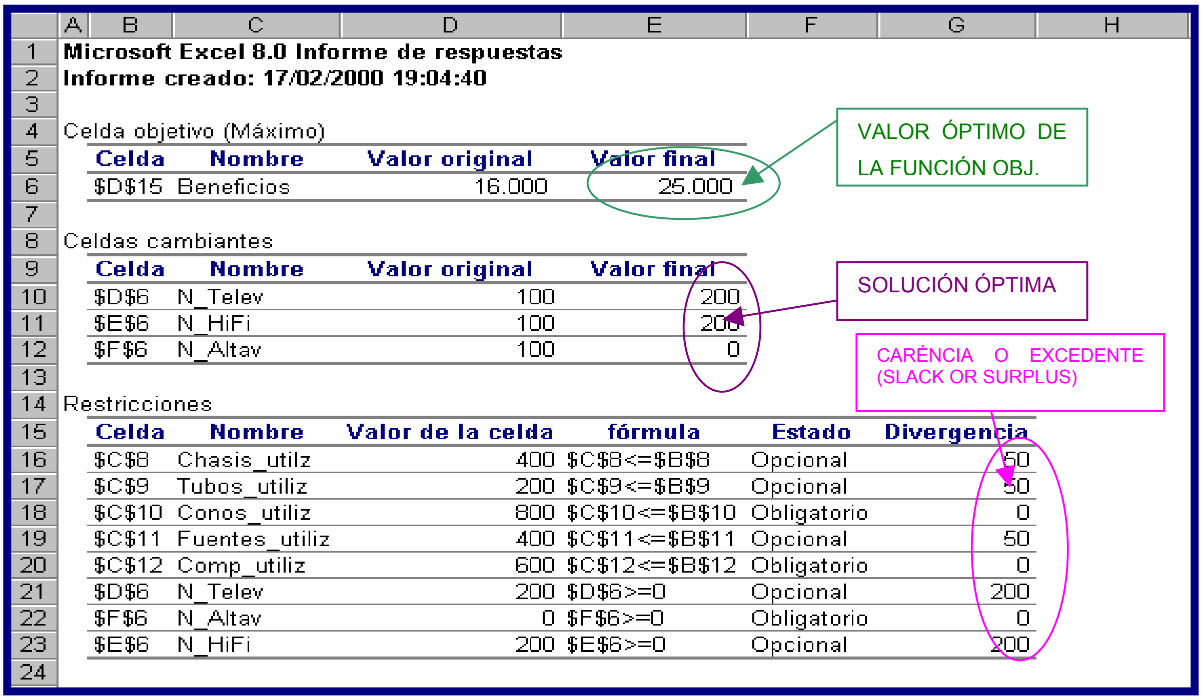
Ahora, deberemos seleccionar dentro de Opciones la casilla Adoptar modelo lineal:



Haciendo clic sobre el botón Resolver, obtendremos la ventana de Resultados:



Elegimos las opciones Respuestas y Sensibilidad. Excel nos dará el siguiente "output":



Microsoft Excel 8.0 Informe de respuestas
Informe creado: 17/02/2000 19:04:40

Celda objetivo (Máximo)

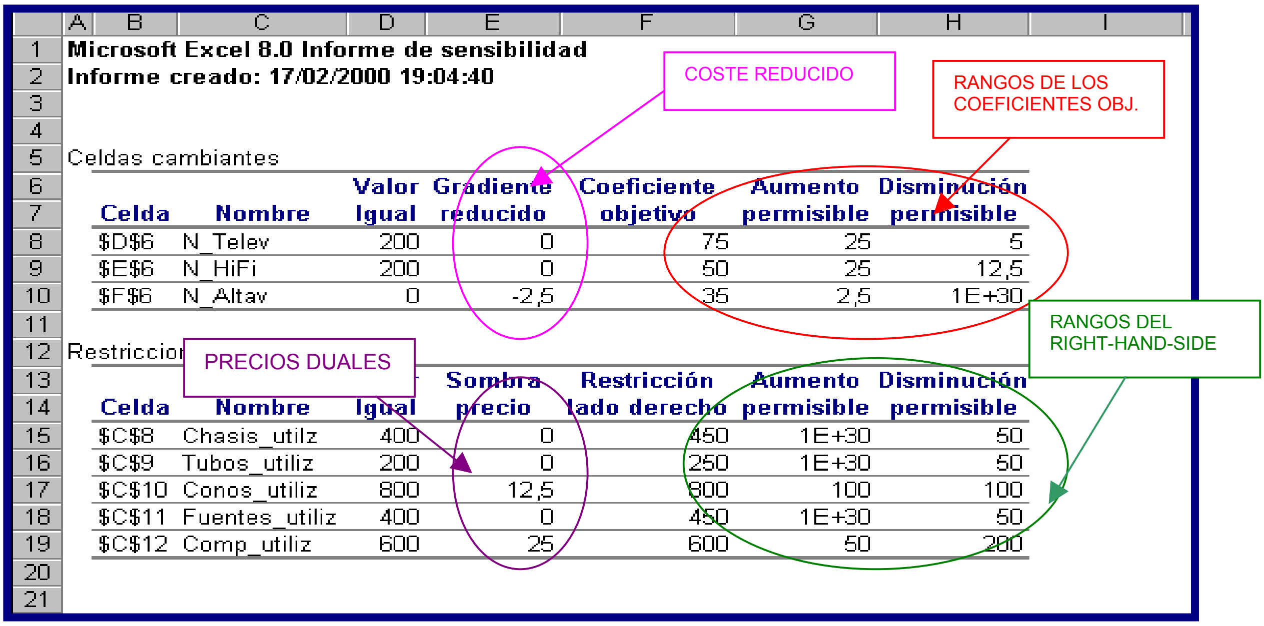
Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$15	Beneficios	16.000	25.000

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$6	N_Telev	100	200
$E$6	N_HiFi	100	200
$F$6	N_Altav	100	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$C$8	Chasis_utilz	400	$C$8<=$B$8	Opcional	50
$C$9	Tubos_utiliz	200	$C$9<=$B$9	Opcional	50
$C$10	Conos_utiliz	800	$C$10<=$B$10	Obligatorio	0
$C$11	Fuentes_utiliz	400	$C$11<=$B$11	Opcional	50
$C$12	Comp_utiliz	600	$C$12<=$B$12	Obligatorio	0
$D$6	N_Telev	200	$D$6>=0	Opcional	200
$F$6	N_Altav	0	$F$6>=0	Obligatorio	0
$E$6	N_HiFi	200	$E$6>=0	Opcional	200



Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad
Informe creado: 17/02/2000 19:04:40

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$D$6	N_Telev	200	0	75	25	5
$E$6	N_HiFi	200	0	50	25	12,5
$F$6	N_Altav	0	-2,5	35	2,5	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
$C$8	Chasis_utilz	400	0	450	1E+30	50
$C$9	Tubos_utiliz	200	0	250	1E+30	50
$C$10	Conos_utiliz	800	12,5	800	100	100
$C$11	Fuentes_utiliz	400	0	450	1E+30	50
$C$12	Comp_utiliz	600	25	600	50	200

Una vez identificados los componentes del informe, su interpretación es casi inmediata: la solución óptima sería producir 200 televisores, 200 equipos Hi-Fi, y ningún altavoz. La columna de **Coste (Gradiente) Reducido** nos indica que no resultará rentable producir altavoces a menos que el beneficio que éstos generen aumente en 2,5 € (llegando a 37,5 €). Examinando los **Rangos de los Coeficientes Objetivo**, observamos que la solución actual no variaría si el beneficio generado por cada televisor se moviese en el rango 70-100 €, o si el generado por los equipos Hi-Fi lo hiciese en el rango 37,5-75 €, o si el de los altavoces no se incrementase en más de 2,5 €. Los Precios Duales determinan, junto con los **Rangos del Right-Hand-Side**, que estaríamos dispuestos a pagar hasta 12,5 € por cada unidad adicional de conos hasta un máximo de 100 conos, y hasta 25 € por cada unidad adicional de componentes electrónicos hasta un máximo de 50 componentes. Observar que, por el contrario, perderíamos 25 € por cada componente electrónico que "nos quitasen" de los 600 disponibles, hasta un máximo de 200 unidades (cifra a partir de la cual será necesario volver a programar).

Ejemplo 2: Política óptima de asignación en gestión de producción

El presente problema será una aplicación directa de los modelos operativos del transporte (Ver ejemplo del transporte en el mathblock de *Aplicaciones de la Programación Lineal*). La utilidad LINDO no está estructurada de acuerdo con el algoritmo especial del transporte y por tanto, no hará uso de las ventajas computacionales que esto plantea. En este ejercicio se hará una ilustración de cómo el uso del Análisis de Sensibilidad permite hallar soluciones alternativas de programas lineales.

Enunciado:

ACE MANUFACTURING COMPANY tiene peticiones de tres productos con características similares:

Producto	A	B	C
Nº peticiones	2000	500	1200

El proceso de producción se realiza a través de tres máquinas. Todas son capaces de elaborar cada uno de los tres productos. Sin embargo, los costes de producción varían dependiendo de las máquinas empleadas. Las capacidades de producción para la semana siguiente, y los costes unitarios, se expresan de esta forma:

Máquina	I	II	III
Capacidad	1500	1500	1000

	Producto A	Producto B	Producto C
Máquina I	1	1.2	0.9
Máquina II	1.3	1.4	1.2
Máquina III	1.1	1	1.2

a) Usar un modelo del transporte para desarrollar un diseño de producción de costo mínimo para productos y máquinas.

b) ¿Existe una solución alternativa al diseño óptimo de producción?

Si el director de producción quisiera diseñar el mínimo coste de tener el número más pequeño posible de cambios de elaboración de productos sobre las diferentes máquinas, ¿qué solución recomendaría? (solución alternativa que dé un menor número de máquinas haciendo cada producto)

Resolución:

Es necesario observar que aunque el modelo que resuelve este problema es de transporte, el problema en sí mismo es de producción. Sin embargo, los modelos de transporte se adaptan adecuadamente a este tipo de problemas. Además, hay que llamar la atención sobre el hecho de que las tres primeras restricciones son de desigualdad porque establecen las capacidades máximas de cada máquina.

La definición de las variables de decisión es la usual, llamando Aj al número de unidades del producto A que se fabrican en la máquina j-ésima, Bj al número de unidades del producto B que se fabrican en la máquina j-ésima y Cj al número de unidades del producto C que se fabrican en la máquina j-ésima

```
<untitled>
MIN A1 + 1.2 B1 + 0.9 C1 + 1.3 A2 + 1.4 B2 + 1.2 C2 + 1.1 A3 + B3 + 1.2 C3

SUBJECT TO
  A1 + B1 + C1 <=   1500
  A2 + B2 + C2 <=   1500
  A3 + B3 + C3 <=   1000
  A1 + A2 + A3 =   2000
  B1 + B2 + B3 =     500
  C1 + C2 + C3 =    1200
END
```

y la solución a este problema aparece escrita en la forma siguiente:

Reports Window

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      5

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      3990.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       A1        300.000000          0.000000
       B1          0.000000          0.300000
       C1       1200.000000          0.000000
       A2       1200.000000          0.000000
       B2          0.000000          0.200000
       C2          0.000000          0.000000
       A3        500.000000          0.000000
       B3        500.000000          0.000000
       C3          0.000000          0.200000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)          0.000000          0.300000
       3)        300.000000          0.000000
       4)          0.000000          0.200000
       5)          0.000000         -1.300000
       6)          0.000000         -1.200000
       7)          0.000000         -1.200000

NO. ITERATIONS=       5


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE          DECREASE
      A1        1.000000          0.300000          0.000000
      B1        1.200000          INFINITY          0.300000
      C1        0.900000          0.000000          INFINITY
      A2        1.300000          0.000000          0.200000
      B2        1.400000          INFINITY          0.200000
      C2        1.200000          INFINITY          0.000000
      A3        1.100000          0.200000          0.200000
      B3        1.000000          0.200000          INFINITY
      C3        1.200000          INFINITY          0.200000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                  RHS           INCREASE          DECREASE
       2     1500.000000       1200.000000        300.000000
       3     1500.000000          INFINITY        300.000000
       4     1000.000000       1200.000000        300.000000
       5     2000.000000        300.000000       1200.000000
       6      500.000000        300.000000        500.000000
       7     1200.000000        300.000000       1200.000000
```

Solución:

a) De acuerdo con la salida que muestra el LINDO, la manera óptima de producción es la siguiente:

Máquina I: 300 unidades del producto A y 1200 unidades del producto C.
Máquina II: 1200 unidades del producto A.
Máquina III: 500 unidades del producto A y 500 unidades del producto B

con un costo óptimo de 3990 unidades monetarias.

b) Observando los costos de la solución óptima, es posible darse cuenta que la variable C2 no es básica pero presenta un costo nulo. Esta situación señala la existencia de una solución alternativa. Una forma de encontrarla consiste en variar el coeficiente de C2 de manera infinitesimal. De acuerdo con el **análisis de sensibilidad** efectuado, el cambio de base se ocasionará mediante una disminución del coeficiente de C2: 1.19999 en lugar de 1.2. Este cambio (u otro similar) permite encontrar la solución alternativa:

Máquina I: 1500 unidades del producto A.
Máquina II: 1200 unidades del producto C
Máquina III: 500 unidades del producto A y 500 unidades del producto B.

con un costo óptimo de 3990 unidades monetarias. De esta forma, la solución alternativa que da un menor número de máquinas para cada producto es esta última. El análisis que se ha descrito anteriormente se explicita en la forma siguiente:

```
<untitled>
MIN A1 + 1.2 B1 + 0.9 C1 + 1.3 A2 + 1.4 B2 + 1.19999 C2 + 1.1 A3 + B3 + 1.2 C3

SUBJECT TO
  A1 + B1 + C1 <=   1500
  A2 + B2 + C2 <=   1500
  A3 + B3 + C3 <=   1000
  A1 + A2 + A3 =   2000
  B1 + B2 + B3 =     500
  C1 + C2 + C3 =    1200
END
```

y la solución a este problema puede verse en la página siguiente.

Comentarios:

Los problemas de transporte que tengan todos sus coeficientes enteros, necesariamente tendrán todas sus soluciones óptimas enteras. Esta propiedad se debe a la especial estructura de la matriz de coeficientes del problema del transporte. Nos podemos servir de esta propiedad para resolver problemas enteros del transporte por el algoritmo clásico, cuando esto sea más sencillo.

Reports Window

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      3989.988

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        A1      1500.000000          0.000000
        B1         0.000000          0.300000
        C1         0.000000          0.000010
        A2         0.000000          0.000000
        B2         0.000000          0.200000
        C2      1200.000000          0.000000
        A3       500.000000          0.000000
        B3       500.000000          0.000000
        C3         0.000000          0.200010


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.300000
        3)       300.000000          0.000000
        4)         0.000000          0.200000
        5)         0.000000         -1.300000
        6)         0.000000         -1.200000
        7)         0.000000         -1.199990

 NO. ITERATIONS=       1


 RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE          DECREASE
       A1        1.000000        0.000010          INFINITY
       B1        1.200000        INFINITY          0.300000
       C1        0.900000        INFINITY          0.000010
       A2        1.300000        0.200000          0.000010
       B2        1.400000        INFINITY          0.200000
       C2        1.199990        0.000010          INFINITY
       A3        1.100000        0.200000          0.200000
       B3        1.000000        0.200000          INFINITY
       C3        1.200000        INFINITY          0.200010

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE          DECREASE
        2      1500.000000       0.000000        300.000000
        3      1500.000000       INFINITY        300.000000
        4      1000.000000       0.000000        300.000000
        5      2000.000000     300.000000          0.000000
        6       500.000000     300.000000          0.000000
        7      1200.000000     300.000000       1200.000000
```

OTROS ASPECTOS IMPORTANTES DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad es de suma importancia en las aplicaciones prácticas de la programación lineal, puesto que la realidad nunca es estática. Los cambios son continuos en los problemas reales: cambios de precios, de disponibilidad de recursos, de tecnología de producción, etc. No obstante, en el análisis de cambios existen dos perspectivas que permiten abordar los problemas:

a) análisis de sensibilidad discreto (ha cambiado el precio de un producto P de 5 € a 8 € y se quiere saber si con el nuevo valor la solución óptima del problema ha cambiado o no, y si lo ha hecho cuál es la nueva solución)

b) análisis de sensibilidad continuo (el precio de un producto P es $w \in [4,10]$ *euros*, entonces se pide resolver el problema de programación lineal en función de *w*).

El primer caso, es el que se ha analizado aquí mediante el uso de LINDO y Excel. El segundo caso es mucho más complejo, pero permite saber cuál es el valor mejor para un parámetro *w*. De esta forma, en lugar de decir qué pasa si cambio el precio del producto P de 5€ a 8€, me preguntó qué precio debo poner al producto P dentro de un rango preestablecido para cumplir otras metas que no se hayan especificado en las restricciones del problema. Se trata de un proceso de elección óptima de precios. La resolución de programas lineales con parámetros es lo que se llama *Programación Paramétrica*, que no se estudiará directamente aquí pero que es interesante conocer. Un ejemplo de programa paramétrico es el siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & (-3+2\theta)x_1 + (3-\theta)x_2 + x_3 \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 5 \\
 & 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_5 = 7 \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

Habría que resolver el programa lineal arrastrando los valores del parámetro □. Para cada valor de dicho parámetro con sentido económico habría que dar una solución al programa lineal que podría representar una minimización de costes.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Anderson, D.R., Sweeney, D. J. y Williams, T.A. (1999): *Contemporary Management Science with Spreadsheets.* International Thomson Publishing Company.

[2] Camm, J. y Evans, J.R. (2000): *Management Science and Decision Technology*. South Western College Publishing.

[3] Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt, C.P., Moore,J.H., Weatherford, L.R. (1998): *Introductory Management Science. Decision Modeling with Spreadsheets*. Prentice Hall.

[4] Hillier, F.S., Hillier, M.S. y Liebermann, G.J. (2000): *Introduction to Management Science. A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*. Irwin-McGraw-Hill.

[5] Lawrence, A.L. y Pasternack, B.A. (2003): *Applied Management Science. A Computer Integrated Approach for Decision Making*. Ed. Wiley.

[6] Winston, W. y Albright, S. C. (1997): *Practical Management Science. Spreadsheet Modeling and Applications*. Duxbury Press.

ENLACES

- http://www.lindo.com
  Página web del software LINDO.
- http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/90-XX.html
  Web con recursos sobre programación lineal.
- http://www.personal.psu.edu/faculty/t/m/tmc7/tmclinks.html
  Web con recursos sobre programación lineal.
- http://www.opsmanagement.com/
  Web de OPSMANAGEMENT.COM (recursos sobre dirección de operaciones).
- http://www.rpi.edu/~mitchj/sites_or.html
  Enlaces a webs sobre investigación operativa.
- http://lionhrtpub.com/ORMS.html
  ORMS Journal.
- http://www.pitt.edu/~jrclass/or/or-intro.doc
  Artículo introductorio a la Investigación Operativa y sus aplicaciones.
- http://www.kem.ae.poznan.pl/Books/Excel-Solver/T1/T1.htm
  Tutorial sobre optimización con Excel-Solver.
- http://www.faqs.org/faqs/linear-programming-faq/
  Web dedicada a preguntas más comunes acerca de Programación Lineal.
- http://carbon.cudenver.edu/~hgreenbe/courseware/LPshort/intro.html
  Se trata de un curso breve de Programación Lineal.