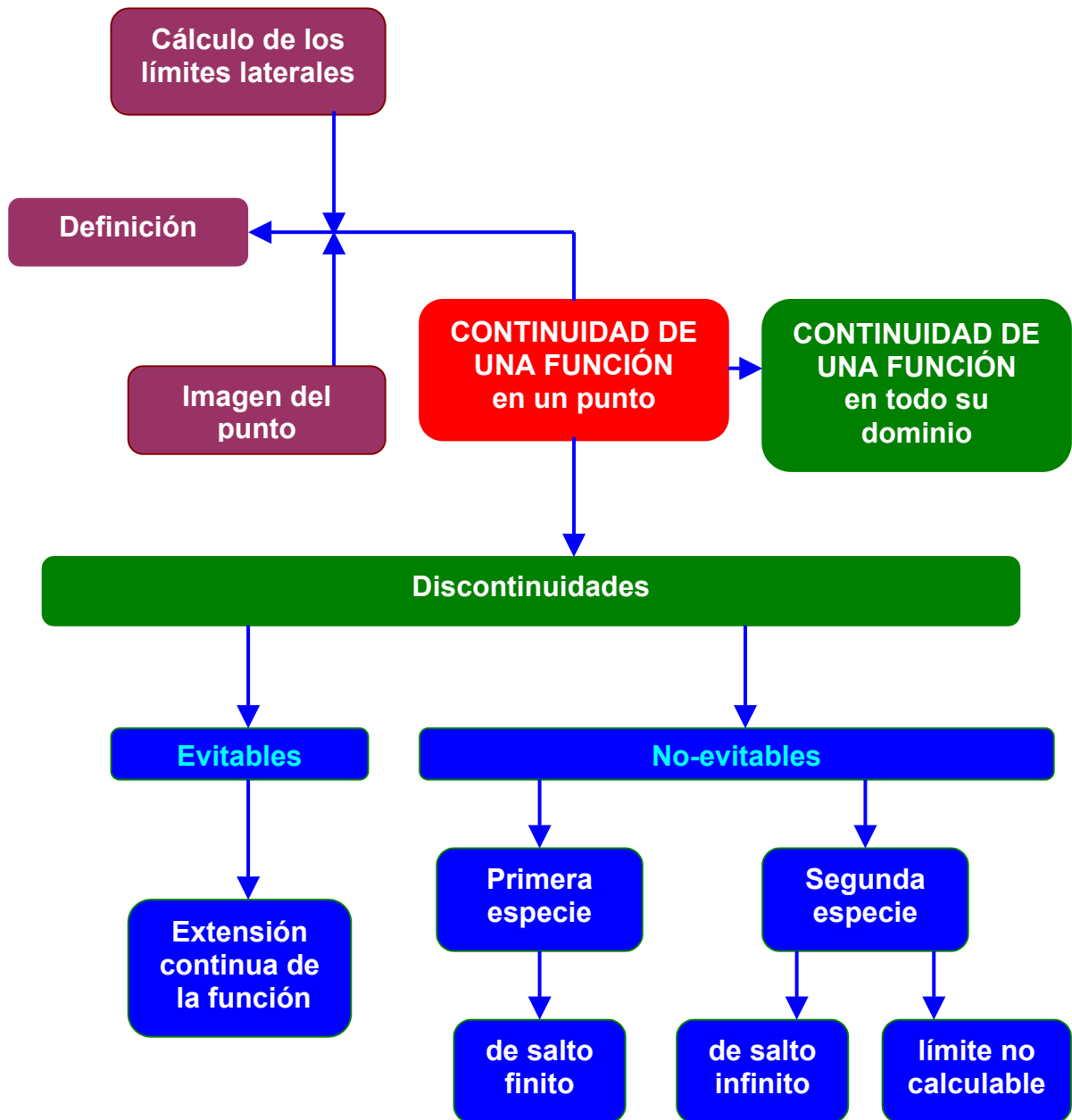


CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Autor: Patrici Molinàs Mata (pmolinas@uoc.edu), José Francisco Martínez Boscá (jmartinezbos@uoc.edu)

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

La aplicación más importante del cálculo de límites es la determinación de la continuidad de una función en un punto. Saber calcular límites permite determinar si una función es continua en un punto, es decir si al trazar dicha curva vamos a tener que levantar el lápiz del papel, llegando en ocasiones a tender a desplazarlo hacia el infinito, o si el transcurrir del lápiz encima de la curva de la función va a ser continuado, sin interrupciones finitas o infinitas, es decir continuo.

Además de saber averiguar si una función es continua en un punto, es conveniente ser capaz de determinar rápidamente en qué puntos de su dominio, la función presenta posibles discontinuidades. Estos puntos deben ser examinados individualmente persiguiendo la determinación del tipo de discontinuidad. Si la discontinuidad es evitable, podremos definir una nueva función que no poseerá esta discontinuidad y, por lo tanto, será continua en dicho entorno o en toda la recta real si éste fuera el único punto de posible discontinuidad. Por el contrario, si la discontinuidad implica un salto finito o infinito de la función o la imposibilidad de efectuar el cálculo del límite, entonces, se trata de una discontinuidad no evitable. Por consiguiente en dicho punto, la función no tendrá derivada, por ejemplo.

La inestimable ayuda de Mathcad nos va a permitir comprobar la posición y tipo de discontinuidades que presenta una función a partir de su representación gráfica.

OBJETIVOS DOCENTES

- Introducir el concepto de continuidad a partir del cálculo de los límites laterales y del cálculo del valor de la función en dicho punto.
- Compaginar el estudio analítico de la continuidad de una función en un punto y en todo su dominio con la comprobación de dichos resultados mediante la representación gráfica con el Mathcad.
- Adquirir destreza en averiguar las posibles discontinuidades a partir de la expresión analítica de la función y de su representación gráfica con Mathcad.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Puesto que la continuidad de una función real de variable real es una propiedad que emana del concepto y cálculo de límites de funciones reales, es imprescindible —previamente a la lectura de este Mathblock— el haber realizado un estudio detallado de los siguientes temas:

- Funciones reales de variable real.
- Límites de funciones.

Asimismo también es muy aconsejable que se tenga un conocimiento mínimo del programa Mathcad, que incluya como calcular límites de funciones.

Por lo tanto, recomendamos que trabajéis los Mathblocks: “Uso básico del Mathcad en Análisis (I): cálculo simbólico y analítico”, “Funciones de una variable” y “Límites de funciones”, antes de empezar con éste. Después de haber trabajado este Mathblock podéis abordar el de “Derivación”.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- **Continuidad de una función en un punto**

Decimos que **una función es continua en un punto** x_0 cuando en dicho punto podemos asegurar que:

1. la **función está definida** en x_0 , es decir, $f(x_0)$ existe
2. los **límites laterales** $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ **existen** (se pueden calcular y son finitos!) y son iguales, lo que equivale a afirmar que existe el límite de la función en dicho punto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) .$$

coincide el límite de la función en el punto con su valor en dicho punto, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$$

- **Discontinuidades: Clasificación**

Existe una discontinuidad en $x = x_0$ cuando alguno de los tres puntos anteriores no se satisface.

Clasificamos las **discontinuidades** en dos grandes grupos, a saber: **evitables** y **no evitables**.

Discontinuidad evitable en un punto y extensión continua de la función en dicho punto

En las **discontinuidades evitables**, el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe (es decir, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ son números reales –finitos– y coinciden), pero $f(x_0)$ no existe en \mathfrak{R} (alguno de sus límites laterales en x_0 tiende a infinito o no se puede calcular). También hablamos de **discontinuidad evitable** cuando $f(x_0)$ existe en \mathfrak{R} pero su valor difiere del límite. La discontinuidad es evitable porque basta con **redefinir la función** asignando a la función en dicho punto, el valor del límite:

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{cuando } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{cuando } x = x_0, \text{ respectivamente.} \end{cases}$$

Discontinuidad evitable en un punto y extensión continua de la función en dicho punto

Las **discontinuidades no evitables** aparecen cuando es imposible obtener el límite de la función en el punto. Esto sucede o bien porque los límites laterales, a pesar de ser ambos finitos no coinciden (**discontinuidad no evitable de primera especie o de salto finito**¹) o porque uno de los dos límites laterales, o ambos límites, divergen (son infinitos) (**discontinuidad no evitable de segunda especie**,

¹ A menudo nos referimos a este tipo de discontinuidades como **discontinuidades de salto**.

de salto infinito²) o porque no se pueden calcular (**discontinuidad no evitable de segunda especie cuyo límite no se puede calcular**).

- **Continuidad de una función en todo su dominio**

Una función es continua en todo su dominio cuando lo es en cada punto del dominio. Para ilustrar lo que acabamos de decir, analizamos la continuidad de una función racional en todo \mathbb{R} . Una función polinómica racional es continua en todos los puntos de la recta real excepto en aquellos en los que su denominador se anula. Si el denominador se anula y el numerador no lo hace en un punto x_0 , la función presenta en x_0 una **discontinuidad no evitable de segunda especie de tipo asintótico**. Se dice también que la recta vertical de ecuación $x = x_0$ es una **asíntota vertical** para la función. No obstante, si el numerador también se anula en $x = x_0$, habrá que simplificar los factores $(x - x_0)$ y redefinir la función. Entonces si obtenemos un denominador que no se anula, decimos que la discontinuidad es **evitable**.

- **Determinación de puntos de discontinuidad**

La búsqueda práctica de puntos de discontinuidad, para una función cuya gráfica desconocemos, consiste —en primer lugar— en determinar si existen puntos de la recta real donde ocurren, entre otras, las siguientes situaciones:

- a. La función no está definida
- b. La función está definida de forma diferente para valores superiores e inferiores al punto
- c. La función diverge al anularse su denominador
- d. La función no puede calcularse al convertirse en negativo el argumento de una raíz de índice par
- e. La función diverge al anularse el argumento de un logaritmo
- f. La función no puede calcularse por tender a infinito el argumento de una función trigonométrica

En cada punto susceptible de presentar una discontinuidad de la función, procederemos a evaluarla, calcular sus límites laterales en aquel punto y averiguar el tipo de discontinuidad si la hubiese a partir de las definiciones dadas anteriormente.

Mathcad nos proporciona una inestimable ayuda para comprobar las discontinuidades y, por supuesto también, para encontrarlas con solamente representar la función.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

- **Ejemplos de los distintos tipos de discontinuidades utilizando Mathcad para el cálculo de los límites**

² También nos llamamos este tipo de discontinuidades de salto infinito **discontinuidades con asíntota vertical**.

Discontinuidad evitable y extensión continua de la función

Estudiamos la discontinuidad que presenta la función $y = \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$ en $x = 4$.

¿Cuánto vale la función en $x = 4$?

No está definida en dicho punto puesto que ambos, el numerador y el denominador, se anulan.

¿Cuánto valen los límites laterales para $x \rightarrow 4$?

Con la ayuda de Mathcad calculamos:	
el límite lateral por la izquierda:	$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} \rightarrow 32$
el límite lateral por la derecha:	$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} \rightarrow 32$
y al ser iguales, el límite existe y tiene el valor de los dos límites laterales:	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} \rightarrow 32$

Esta función presenta una discontinuidad evitable en $x = 4$. Por lo tanto, podemos definir una nueva función, extensión continua de la primera o función extendida, de la siguiente manera:

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} & \text{cuando } x \neq 4 \\ 32 & \text{cuando } x = 4, \text{ respectivamente.} \end{cases}$$

Discontinuidad no evitable de primera especie (o de salto finito)

Estudiamos la discontinuidad que presenta la función $y = \frac{x}{|x|}$ en $x = 0$.

¿Cuánto vale la función en $x = 0$?

No está definida en dicho punto puesto que ambos, el numerador y el denominador, se anulan.

¿Cuánto valen los límites laterales para $x \rightarrow 0$?

<p>Con la ayuda de Mathcad calculamos:</p> <p>el límite lateral por la izquierda:</p> <p>el límite lateral por la derecha:</p> <p>y al no coincidir, el límite no existe como Mathcad afirma:</p>	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{ x } \rightarrow -1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{ x } \rightarrow 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{ x } \rightarrow \text{undefined}$
---	--

Esta función presenta una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

Discontinuidad no evitable de segunda especie de salto infinito

Estudiamos la discontinuidad que presenta la función $y = \frac{x+1}{x-1}$ en $x = 1$.

¿Cuánto vale la función en $x = 1$?

No está definida en dicho punto puesto que ambos, el denominador, se anulan.

¿Cuánto valen los límites laterales para $x \rightarrow 1$?

<p>Ambos límites divergen como vemos con Mathcad:</p> <p>el límite lateral por la izquierda:</p> <p>el límite lateral por la derecha:</p> <p>y al no existir los límites laterales (no tienden a ningún número real sino que divergen) el límite tampoco existe:</p>	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} \rightarrow -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \text{undefined}$
--	--

Estamos, pues ante una discontinuidad no-evitable de segunda especie de salto infinito o asíntota

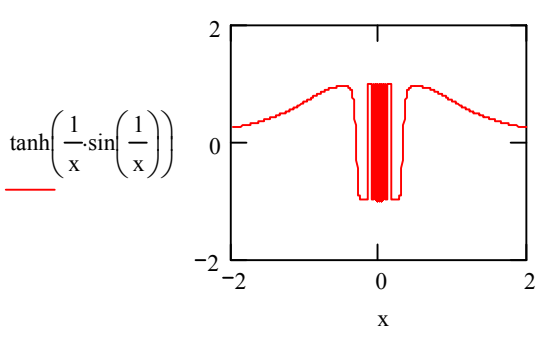
Discontinuidad no evitable de segunda especie con límite no calculable

Estudiamos la discontinuidad que presenta la función $y = \tanh\left(\frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ en $x = 0$.

¿Cuánto vale la función en $x = 0$?

No está definida en dicho punto puesto que dos denominadores de dicha expresión se anulan.

¿Cuánto valen los límites laterales para $x \rightarrow 0$?

<p>Ambos límites no se pueden calcular como vemos con Mathcad:</p> <p>el límite lateral por la izquierda:</p> <p>el límite lateral por la derecha:</p> <p>y al no existir los límites laterales (no tienden a ningún número real ni divergen, sino oscilan) el límite tampoco existe:</p> <p>Representemos con Mathcad el comportamiento en el entorno de $x = 0$, de esta función:</p> <p>Estamos pues tratando con una discontinuidad no evitable de segunda especie sin límite calculable y que tampoco diverge.</p>	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \tanh\left(\frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \rightarrow \text{undefined}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tanh\left(\frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \rightarrow \text{undefined}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \tanh\left(\frac{1}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \rightarrow \text{undefined}$ 
--	---

- **Determinación de los puntos donde una función presenta discontinuidades desconociendo su gráfica. Comprobación gráfica del resultado con Mathcad**

Estudiamos si las siguientes funciones presentan alguna discontinuidad:

a) $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

b) $y = \frac{x}{\sin x}$

c) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x}$

d) $y = \cos\left(\frac{x-2}{x^3}\right)$

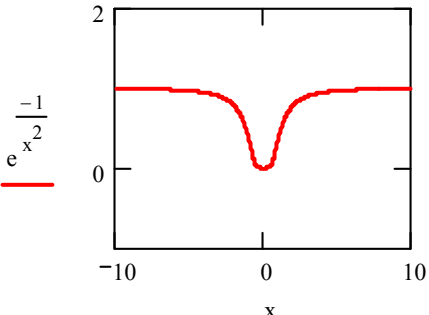
e) $y = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, respectivamente.

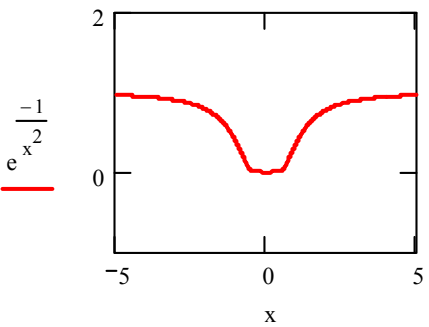
a)

La función no se puede calcular en un sólo punto, para $x = 0$, porque dividimos por cero. Dado que los límites laterales en dicho punto existen y son iguales a 0 , el límite en $x = 0$ existe y la función presenta una discontinuidad evitable.

La simple inspección de la gráfica de la función nos indica claramente que o bien la función es continua o la o las discontinuidades que presenta con todas evitables.

En particular, en el punto cero, vemos que la función no presenta ninguna discontinuidad no evitable.

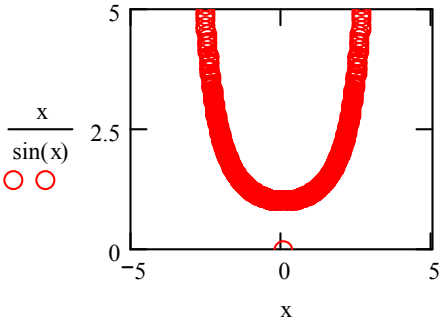
$$\frac{-1}{e^{x^2}}$$


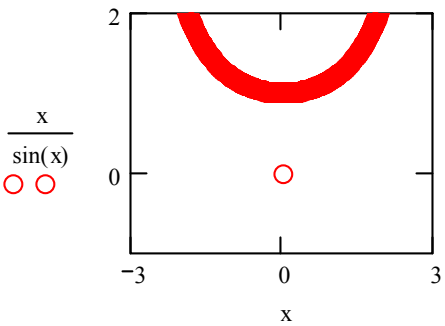
$$\frac{-1}{e^{x^2}}$$


b)

La función no está definida en $x = 0$ ya que tanto el numerador como el denominador se anulan. No obstante los límites laterales existen y valen ambos 1 . También en este caso se puede redefinir la función suprimiendo la discontinuidad evitable.

La simple inspección de la gráfica de la función nos indica claramente que la función presenta una discontinuidad evitable en $x=0$.

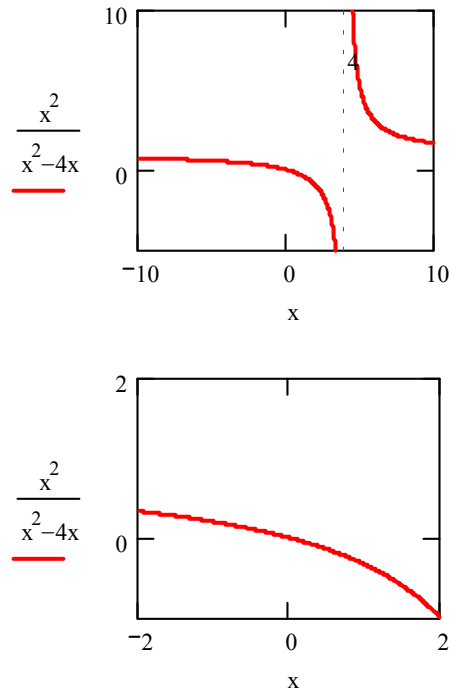
$$\frac{x}{\sin(x)}$$


$$\frac{x}{\sin(x)}$$


c)

La función no se puede calcular en dos puntos, para $x = 0$ y para $x = 4$. En el primer punto, dividimos 0 entre 0 y, en el segundo, se anula el denominador mientras el numerador es finito. En $x = 0$ tenemos una discontinuidad evitable mientras que en $x = 4$ es no evitable.

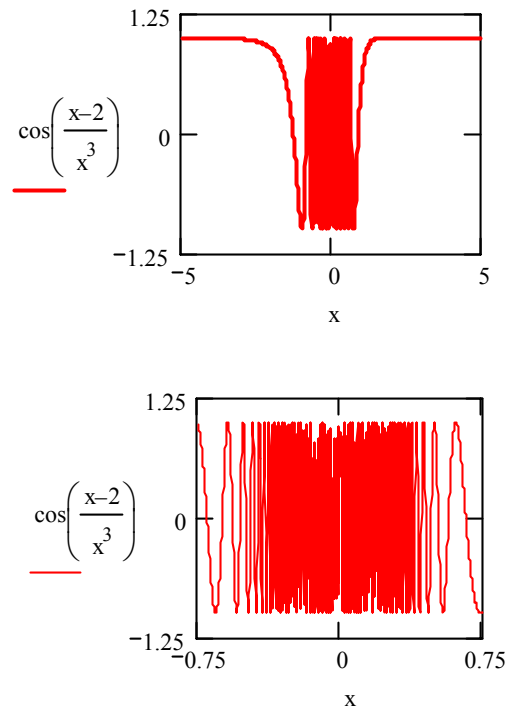
La simple inspección de la gráfica de la función nos indica claramente que la función presenta una discontinuidad de segunda especie de salto infinito en $x = 4$. Mientras que en $x = 0$ la función puede ser extendida para garantizar su continuidad.



d)

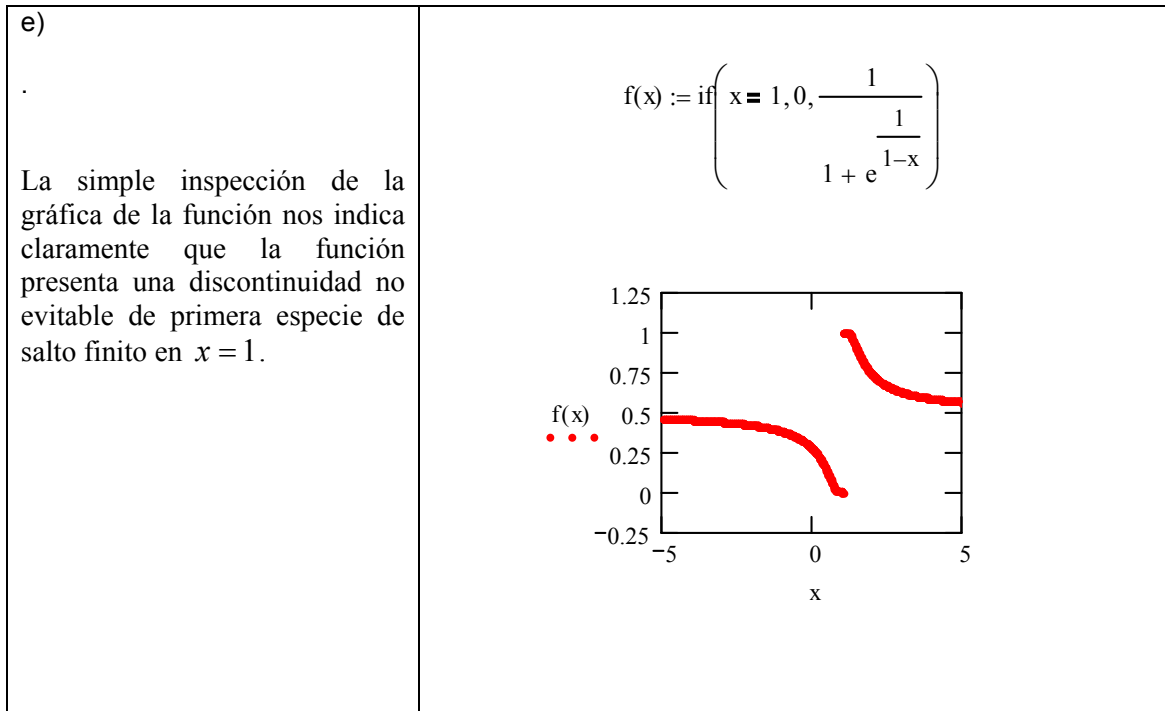
La función no está definida en $x = 0$ ya que el numerador de la expresión de la cual debemos calcular el coseno, diverge. Dado que el coseno es una función periódica, oscilará continuamente sin cesar cuando $x \rightarrow 0$. El límite, pues, no existe.

La simple inspección de la gráfica de la función nos indica claramente que la función presenta una discontinuidad no evitable de segunda especie con imposibilidad de calcular el límite en $x=0$.



e) La función está definida de forma particular en $x = 1$. En el resto de puntos, la función no presenta ninguna posible discontinuidad puesto que la exponencial nunca puede ser negativa.

Por lo tanto, estudiaremos sólo la continuidad en $x = 1$, que produciría una división por cero en la expresión válida para el resto de puntos. A pesar de que ambos límites laterales en $x = 1$ son finitos, éstos no son iguales; por la derecha, el límite es igual a 1 mientras que por la izquierda vale 0. Por consiguiente, el límite de la función en $x = 1$ no existe y la función presenta una discontinuidad no evitable de salto finito en dicho punto.



CONCLUSIONES

Conocer si una función es continua en un punto y en todo su dominio, se reduce a saber evaluar esta función en todo punto y ser capaz de obtener sus límites laterales en cualquier punto. La continuidad es una propiedad fundamental puesto que la derivabilidad de una función en un punto depende, entre otras cosas, de si es continua en dicho punto. Cuando una función es continua es susceptible de ser utilizada o “encontrada” en el análisis de magnitudes regulares y finitas.

Hemos visto como Mathcad nos puede resultar de gran utilidad para determinar dónde están y de qué tipo son las discontinuidades de una función. De hecho la continuidad de una función en un punto puede entenderse como la suavidad con la que avanzamos cuando trazamos la curva de la función. En efecto, la representación gráfica de la función contiene información suficiente para comprobar límites laterales y, por lo tanto, el carácter de la supuesta discontinuidad.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. M. Ortega (1990): "Introducción al Análisis Matemático", Manuales de la Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.
- [2] V.A. Kudryasvtsev and B.P. Demidovich (1981): "A brief course of Higher Mathematics", Mir Publishers, Moscú, p. 147-158.
- [3] T.A. Apostol (1981): "Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal", Reverté, Barcelona, p. 160-162.
- [4] R. Calm, N. Coll, y M.R. Estela (1992): "Problemas de cálculo", Micromar, Barcelona, p. 66-106.
- [5] R. Courant and F. John (1976): "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Limusa, México, p. 55-67.
- [6] S. Martín Monlleví (2000): "Las ideas básicas del cálculo", Ediuoc, Barcelona, p. 9-16.
- [7] B. Demidovich (1978): "Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático", Paraninfo, Madrid, p. 34-40.
- [8] M.R. Estela, E. Cuello y A.Carmona (2000): "Cálculo: Problemas y soluciones", Edicions UPC, Barcelona, p. 33-46.
- [9] T.M. Apostol (1979): "Análisis Matemático", Reverté, Barcelona, p. 95-102.

ENLACES

- [W1] http://www.satd.uma.es/a_valverde/aula-calculo/calculo.html
Excelente aula virtual con apuntes muy completos de campos escalares. Incluye un tema (C5) con abundante información sobre continuidad en una dimensión.
- [W2] http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/cie_mat_calculo/apuntes.html
En el Capítulo 1 se trata de la continuidad de una función en un punto.
- [W3] <http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/calculo/grupo15t>
Apuntes, ejercicios, problemas y exámenes de cálculo (también de continuidad).
- [W4] <http://math.uprm.edu/~josediaz/Continuidad.pdf>
Ejercicios sobre continuidad.
- [W5] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/apuntes/
Apuntes de continuidad.
- [W6] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/problemas/
Problemas y ejercicios de continuidad.

- [W7] <http://planetmath.org/encyclopedia/Continuous.html>
Página web de PlanetMath.org dedicada a la continuidad de una función en un punto. En inglés.
- [W8] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/funciones_continuas/default.htm
Apuntes de cálculo de funciones continuas.
- [W9] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/calculo_1/default.htm
Excelente resumen de cálculo que engloba también continuidad.