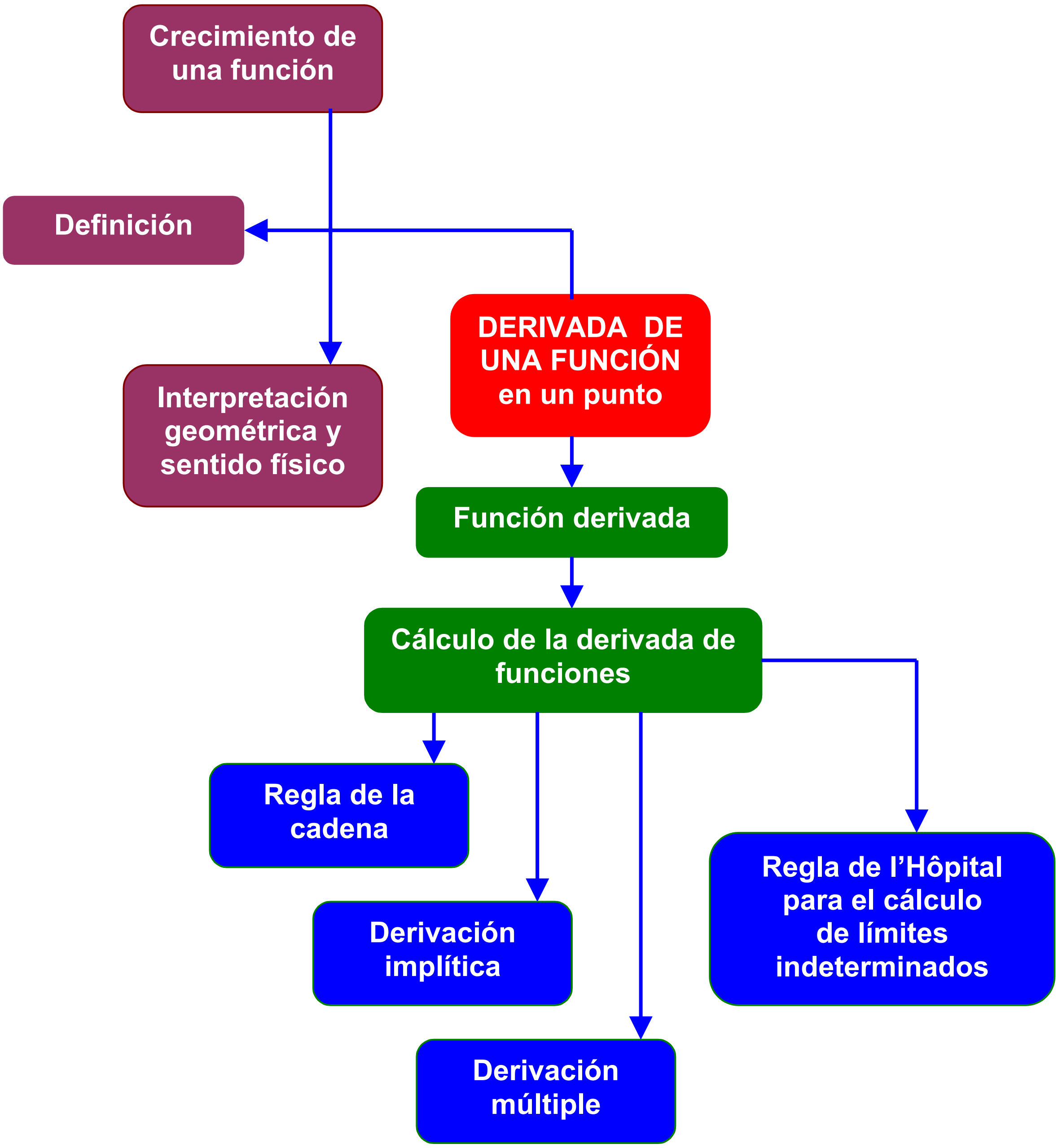
DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Autor: Patrici Molinàs Mata (pmolinas@uoc.edu), José Francisco Martínez Boscá (jmartinezbos@uoc.edu)

ESQUEMA DE CONTENIDOS



Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

INTRODUCCIÓN

La derivación constituye una de las operaciones de mayor importancia cuando tratamos de funciones reales de variable real puesto que nos indica la tasa de variación de la función en un instante determinado o para un valor determinado de la variable, si ésta no es el tiempo. Por tanto, la derivada de una función para un valor de la variable es la tasa de variación *instantánea* de dicha función y para el valor concreto de la variable. De hecho, una variación en un instante de tiempo determinado o para un valor concreto de la variable de derivación se puede entender como una variación media cuando el intervalo usado para la obtención de dicha media tiende a cero. Así la derivada es el límite de la tasa de variación media alrededor de un valor de la variable cuando el intervalo de medición tiene a cero.

Además de saber calcular la derivada de una función en un punto, es conveniente ser capaz de determinar rápidamente la función derivada de cualquier función. La derivada nos informará de con qué celeridad va cambiando el valor de la función en el punto considerado. Este Mathblock está dedicado precisamente a aprender tanto a calcular el valor de la derivada de una función en un punto como a saber obtener la función derivada de la original. Por este motivo dedicaremos especial atención a como derivar funciones compuestas, funciones implícitas así como a efectuar diversas derivaciones sobre una misma función. Una de las aplicaciones de las derivadas es la Regla de l'Hôpital que permite resolver límites indeterminados mediante derivación.

OBJETIVOS DOCENTES

- Introducir el concepto de derivada, proporcionar su interpretación gráfica e ilustrar su interpretación física. Saber distinguir en qué puntos una función es derivable y en qué puntos no admite derivada.

- Familiarizarse con el cálculo automático de derivadas, con la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas, con la derivación múltiple y —finalmente— con la derivación implícita.

- Adquirir destreza en el cálculo de límites funcionales mediante la regla de l'Hôpital basada en la derivación de funciones.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Dado que la derivación de una función es una operación consistente en el cálculo de un límite en un punto donde la función es continua, es recomendable —previamente a la lectura de este Mathblock— el haber realizado un estudio detallado de los siguientes temas:

- Funciones reales de variable real.
- Límites de funciones.
- Continuidad en una dimensión.

Asimismo también es muy aconsejable que se tenga un conocimiento mínimo del programa Mathcad, que incluya como calcular límites de funciones.

Por lo tanto, recomendamos que trabajéis los Mathblocks: "Uso básico del Mathcad en Análisis (I): cálculo simbólico y analítico", "Funciones de una variable", "Límites de funciones" y "Continuidad en una dimensión", antes de empezar con éste. Después de haber trabajado este Mathblock podéis abordar el de "Aplicaciones de las derivadas".

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- **La derivada de una función en un punto: definición**

Decimos que una función $f(x)$ **es derivable en un punto** a si existe el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

De hecho esto equivale a que exista este otro límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

basta con substituir $h = x - a$. El valor de estos límites, que son equivalentes, recibe el nombre de la **derivada de la función** $f(x)$ **en el punto** a **y se representa** $f'(a)$ **o** $f'(x)\big|_{x=a}$.

La derivada de una función en un punto es un número real que mide cómo está creciendo la función en relación con la variable, en dicho punto de la variable. Es importante destacar que si una función presenta una discontinuidad en un punto, no existe la derivada de la función en aquel punto. Dicho de otra manera, si una función es **derivable** en un punto, tiene que ser **continua** en este punto.

- **Interpretación geométrica de la derivada: crecimiento y decrecimiento**

La derivada de una función f en un punto a se puede representar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. Por lo tanto,

1. Allí donde la gráfica de f es **ascendente** al recorrerla de izquierda a derecha, la función es **creciente**, la recta tangente tiene **pendiente positiva** y **la derivada es positiva**.

2. Donde la gráfica es **descendente**, la función es **decreciente**, la recta tangente tiene **pendiente negativa** y la **derivada es negativa**.

3. En los puntos en que la **función ni sube, ni baja** (que son, entre otros, las cumbres y las hondanadas), la tangente en el grafo de f es horizontal y, por tanto, **la derivada vale cero**.

- **Interpretación física de la derivada**

Dada una función $y = f(x)$ podemos calcular el cociente incremental de dicha función en $x = a$, es decir, el cociente entre el incremento que sufre la función $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$, al modificar la variable un $\Delta x = x - a$ con $x \neq a$. El cociente incremental o **tasa media de variación** de la función $y = f(x)$ en el intervalo $\Delta x = x - a$ viene dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La **derivada** es esta tasa media de variación cuando el incremento de la variable tiende a cero alrededor de un punto $x = a$ o **tasa instantánea de variación** de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Las siguientes notaciones son equivalentes para la derivada que hemos expresado también como tres límites distintos:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = f'(x)\big|_{x=a} = \left.\dot{f}\right|_{x=a}$$

La primera notación se debe a Leibniz, la segunda es que solemos usar en matemáticas modernas y la última es la utilizada por Newton.

- ### Función derivada

Es necesario que distingamos claramente la **derivada de una función en un punto**, que es un número, y la **función derivada**, que es una función. La función derivada de una función f (que se representa como f') es la que nos da, para cada valor de la variable x, la derivada $f'(x)$,. En algunas ocasiones se utiliza la expresión *derivada de* f, tanto en el sentido de derivada numérica com en el de función derivada.

- ### Cálculo de derivadas

Ahora que ya tenemos una idea bastante clara de lo que es la derivada y cuál es su utilidad, tenemos que hacer un resumen de las herramientas que nos van a permitir calcularlas sin tener que aplicar la definición. Es decir aplicamos la definición para, por ejemplo, el caso general de suma de dos funciones y sabremos que para cualquier suma de dos funciones, la derivada sera la suma de las dos derivadas.

- **Función constante**

La derivada de una función constante es cero: $f(x) = const. \ \forall x \ \Rightarrow \ f'(x) = 0$

- **Suma de dos funciones**

La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de las funciones: $f(x) = g_1(x) + g_2(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g_1'(x) + g_2'(x)$. Esto también se cumple para la diferencia. Vamos a demostrar esta propiedad como ejemplo de demostración de propiedades de derivación. Empecemos escribiendo la derivada de la suma de funciones:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g_1(a+h) + g_2(a+h) - g_1(a) - g_2(a)}{h} =$$

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

al agrupar términos:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g_1(a+h) - g_1(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g_2(a+h) - g_2(a)}{h} = g_1'(a) + g_2'(a)$$

como queríamos demostrar.

- **Producto de dos funciones**

La derivada del producto de dos funciones, $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$, se calcula según:

$$f'(a) = g_1'(a) \cdot g_2(a) + g_1(a) \cdot g_2'(a)$$

En consecuencia, si c es una función constante tenemos:

$$\frac{d}{dx} cf(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$$

- **Función potencial**

Es fácil deducir la fórmula de la derivada de una función potencial $f(x) = x^n$. Basta para ello utilizar la fórmula del producto de derivadas que acabamos de dar para $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x^2$, $x^4 = x \cdot x^3$, etc:

La derivada de $x^2 = x \cdot x$, aplicando la regla del producto es:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \;;$$

Utilizando el resultado que acabamos de obtener, la derivada de $x^3 = x \cdot x^2$ es:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x^2) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$$

y la $x^4 = x \cdot x^3$, substituyendo el resultado acabado de obtener:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x^3) = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = 4x^3$$

Así, a partir de la información de esta secuencia, podemos llegar a inferir la expresión del término general:

$$\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

- **Funciones trigonométricas**

Las funciones derivadas de las principales funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x) \qquad \frac{d}{dx}(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

- **Funciones exponencial y logarítmica**

Las derivadas de las funciones exponencial y logarítmica son las siguientes:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

y en particular, cuando utilizamos como base el número e:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

- **Regla de la cadena**

Si tenemos una función compuesta $f(x) = g_1(g_2(x))$, la derivada será:

$$f'(x) = g_1'(g_2(x)) \cdot g_2'(x)$$

En notación diferencial, si z es función de y e y es función de x, tenemos:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Encontraréis un ejemplo de derivación mediante la esta regla en “Casos prácticos con software”.

- **Derivación implícita**

La técnica de la derivación implícita para calcular $y'(x)$ consiste en derivar cada lado de la expresión respecto de x teniendo en cuenta en todo momento que y es función de x. Esta técnica sirve para obtener la derivada cuando es imposible despejar la $y(x)$.

Encontraréis un ejemplo de derivación implícita en “Casos prácticos con software”.

- **Derivación múltiple**

Son muchas las aplicaciones en las que utilizamos la derivada de una derivada. Llamamos a la derivada de la derivada de f, **derivada segunda** de f y se escribe f''. En notación diferencial, la derivada segunda se escribe como:

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

y se lee **derivada segunda de y respecto de x dos veces.** Análogamente podemos definir la **derivada n-ésima de y respecto de x n veces** que escribiremos:

$$f^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

- **Regla de l'Hôpital**

Sean f y g funciones reales de variable real, continuas, tales que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ o bien que ambos límites son nulos: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces también existe el $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, y ambos coinciden:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es muy útil para resolver límites indeterminados como mostramos, en un ejemplo, en "Casos prácticos con software".

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

- **Cálculo de derivada de una función en un punto a partir de la definición de derivada**

Utilizando la definición de derivada, averiguaremos si las siguientes funciones son derivables en x=0:

a) $f(x) = \sin(x)$ *b)* $g(x) = (1-|x|)^2$ *c)* $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$

En el caso que sean derivables, proporcionaremos una interpretación geométrica a las derivadas calculadas.

La derivada de una función en un punto es la tasa instantánea de crecimiento en dicho punto:

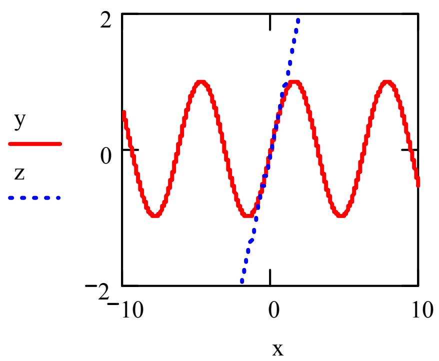
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En *a=0* y para la función *f(x)* tenemos que ambos límites laterales existen y son iguales a *1*, entonces la derivada en dicho punto existe y es igual a *1*:

$$f'(x)\big|_{x=0}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

La derivada corresponde a la pendiente de la recta tangente a dicho punto como podemos comprobar con la gráfica de la función y de su tangente (*z*) en *x=0*:

$j := 0..2000 \qquad x_j := 0.01\cdot(j-1000) \qquad y_j := \sin(x_j) \qquad z_j := x_j$



Para *g(x)* hemos de realizar los siguientes límites laterales utilizando la definición de valor absoluto ($h=|h|$ si $h>0$ y $h=-|h|$ si $h<0$):

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{(1-|h|)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-2|h|+|h|^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-2|h|+|h|^2}{|h|}=\lim_{h\to 0^+}(-2+|h|)=-2$$

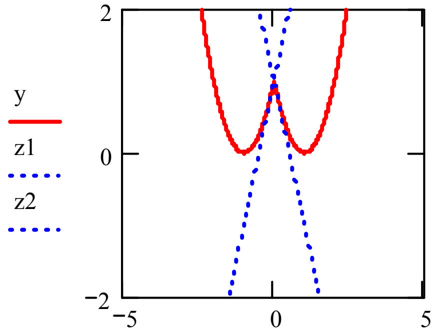
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{(1-|h|)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1-2|h|+|h|^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2|h|+|h|^2}{-|h|}=\lim_{h\to 0^-}(+2-|h|)=+2$$

Dado que ambos límites no coinciden, la derivada en *x=0* no existe.

Vemos con Mathcad que las rectas tangentes a *g(x)* por la izquierda (z1) y por la derecha (z2) (de pendientes *+2* y *-2*, respectivamente) no coinciden:

$j := 0..2000 \qquad x_j := 0.01\cdot(j-1000) \qquad y_j := \left(1-\left|x_j\right|\right)^2$

$z1_j := 2x_j + 1 \qquad z2_j := -2x_j + 1$

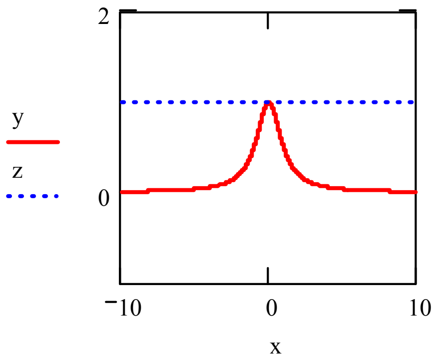


Para el tercer ejemplo con *h(x)*, los límites laterales del cociente incremental coinciden y podemos obtener el valor de la derivada en x=0:

$$h'(x)\Big|_{x=0} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1-h^2}{h(1+h^2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{1+h^2} = 0$$

Con Mathcad observamos que la recta tangente (z) a la función en x=0 es efectivamente una recta horizontal de pendiente nula (igual a la derivada en dicho punto).

$j := 0..2000 \qquad x_j := 0.01\cdot(j-1000) \qquad y_j := \dfrac{1}{1+\left(x_j\right)^2} \qquad z_j := 1$



- **La derivada como tasa instantánea de crecimiento: aplicaciones**

Supongamos que hinchamos un balón isotrópicamente a un ritmo constante de $36\dfrac{cm^3}{s}$, y nos preguntamos cual es la variación temporal del radio cuando éste vale exactamente 3cm. Suponiendo que el radio del balón es cero en el instante inicial t=0, calcularemos también la tasa media de crecimiento entre los instantes que el radio del balón media 2cm y 4cm.

Calculemos en primer lugar la función *V(r)*, volumen del balón, $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$. Por la definición de derivada, sabemos que la derivada de *V(r)* respecto al tiempo corresponde al "ritmo" que seguimos cuando hinchamos el balón. Por lo tanto:

$$\frac{dV(r)}{dt}=36\frac{cm^3}{s} \qquad (1)$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dV(r)}{dr}\frac{dr}{dt}=36\frac{cm^3}{s}$$

La variación instantánea del radio del balón que tenemos que calcular es precisamente

$$r'(t)=\frac{dr}{dt}=\frac{36cm^3/s}{dV/dt}=\frac{36cm^3/s}{4\pi\,(r(t))^2}$$

Nos la piden cuando el radio mide *3cm.* Substituyamos pues en la última expresión:

$$r'(t,r=3cm)=\frac{36cm^3/s}{4\pi\,(r(t))^2}=\frac{36cm^3/s}{4\pi\,9cm^2}=\frac{1}{\pi}cm\cdot s^{-1}$$

Para obtener la tasa media de crecimiento entre los instantes en que el radio vale *2cm* y *4cm* basta dividir el incremento de radios entre el incremento de tiempos correspondiente. Integrando la ecuación (1) entre $r_0=r(t_0)$ y $r_f=r(t_f)$ para r, y entre t_0 y t_f para t obtenemos:

$$\frac{4\pi}{3}({r_f}^3-{r_0}^3)=36\Delta t$$

Como hemos supuesto que $r_0=t_0=0$, entonces: $t_f=\frac{1}{36}\frac{4\pi}{3}{r_f}^3$. Los tiempos buscados son: $t_{(r=2cm)}=\frac{8\pi}{27}s$ y $t_{(r=4cm)}=\frac{64\pi}{27}s$. La tasa media de crecimiento del radio entre estos dos instantes corresponde a:

$$\frac{\Delta r(t)}{\Delta t}=\frac{4-2}{\frac{64\pi}{27}-\frac{8\pi}{27}}=\frac{27}{28}\frac{1}{\pi}cm\cdot s^{-1}$$

- **Cálculo automático de derivadas. Regla de la Cadena y derivación implícita**

Calculemos las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ b) $g(x)=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ c) $h(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}tgx$ d) $i(x)=x^x$

a) Podemos rescribir f(x) como la composición de tres funciones g(h(i(x))) donde $i(x)=\dfrac{1}{x}$, $h(i)=1+e^i$ y $g(h)=\dfrac{1}{h}$. Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=\frac{d}{dx}\big(g(h(i(x))\big)=\left.\frac{dg}{dh}\right|_{h(x)=1+e^{\frac{1}{x}}}\left.\frac{dh}{di}\right|_{i(x)=\frac{1}{x}}\frac{di}{dx}=$$

$$=\left.\frac{-1}{h^2}\right|_{h(x)=1+e^{\frac{1}{x}}}\left.e^i\right|_{i(x)=\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{-1}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$$

b) Derivaremos utilizando la expresión para la derivada del cociente de funciones $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)=\frac{(-\sin x)(1-\cos x)-(1+\cos x)(\sin x)}{(1-\cos x)^2}=\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

c) Efectuemos la segunda derivada de tgx:

$$\frac{d^2}{dx^2}(tgx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\frac{-1}{\cos^4 x}2\cos x(-\sin x)=$$

$$=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}=\frac{2tgx}{\cos^2 x}$$

d) A fin de derivar la expresión $y=x^x$ tomemos logaritmos (neperianos para más comodidad al derivar) en ambos lados de la ecuación $\ln(y)=x\ln x$. Derivando implícitamente respecto de x obtenemos:

$$\frac{y'}{y}=\ln x+\frac{x}{x} \qquad \text{es decir:} \qquad y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

Comprobamos las cuatro derivadas con Mathcad utilizando la derivación simbólica y las utilidades *simplify* y *substitute* para conseguir comparar con las expresiones analíticas:

a)

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \rightarrow \frac{1}{\left(1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2\cdot x^2}\cdot\exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

b)

$$\frac{d}{dx}\frac{(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))} \rightarrow \frac{-\sin(x)}{(1-\cos(x))} - \frac{(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))^2}\cdot\sin(x) \text{ simplify } \rightarrow -2\cdot\frac{\sin(x)}{\left(1-2\cdot\cos(x)+\cos(x)^2\right)}$$

$$-2\cdot\frac{\sin(x)}{\left(1-2\cdot\cos(x)+\cos(x)^2\right)} \text{ substitute }, 1-2\cdot\cos(x)+\cos(x)^2 = (1-\cos(x))^2 \rightarrow -2\cdot\frac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$$

c)

$$\frac{d^2}{dx^2}\tan(x) \rightarrow 2\cdot\tan(x)\cdot\left(1+\tan(x)^2\right) \text{ substitute }, 1+\tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2} \rightarrow 2\cdot\frac{\tan(x)}{\cos(x)^2} \rightarrow 2\cdot\frac{\tan(x)}{\cos(x)^2}$$

$$2\cdot\frac{\tan(x)}{\cos(x)^2} \text{ substitute }, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \rightarrow 2\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}$$

d)

$$\frac{d}{dx}x^x \rightarrow x^x\cdot(\ln(x)+1)$$

- **Aplicación del cálculo diferencial al computo de límites: Regla de l'Hôpital**

Calculemos los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$ *b)* $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}-p}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}-q}$ con p y q >0

utilizando la regla de l'Hôpital.

El límite en *a)* tiende a $\frac{0}{0}$ cuando $x \to 0$ y, por lo tanto, podemos aplicar la regla de l'Hôpital.

Derivando el numerador y el denominador obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\alpha x}-e^{\beta x})'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}}{1}=\alpha-\beta$$

Fijaros que no calculamos los límites laterales por separado puesto que coinciden como podéis comprobar.

En el caso *b)* también podemos aplicar la regla de l'Hôpital puesto que el límite tiende a $\frac{0}{0}$ cuando $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}-p}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}-q}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}-p\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}-q\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}=$$

que simplificando nos conduce a:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}}=\frac{q}{p}$$

Comprobamos ambos resultados con Mathcad:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\cdot x}-e^{\beta\cdot x}}{x}\ \to \alpha-\beta$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p\cdot\left[\sqrt{1^2+\frac{1}{(x\cdot p)^2}}-1\right]}{q\cdot\left[\sqrt{1^2+\frac{1}{(x\cdot q)^2}}-1\right]}\ \to \frac{1}{p}\cdot q$$

CONCLUSIONES

Hemos visto como podemos calcular la derivada de una función en un punto, que nos indica la variación de dicha función en aquel punto. Se trata de una generalización del concepto de tasa de variación media para un entorno del punto, muy pequeño. La definición de derivada reposa en el hecho de hacer tender a cero el tamaño de dicho intervalo. La derivada es pues la tasa de variación instantánea de una función en un punto. La derivada se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la función en el punto considerado.

Derivando una función en todos los puntos de su dominio, podemos construir otra función que llamaremos la función derivada de la primera función. Hemos presentado reglas de derivación automática que nos permiten derivar una expresión sin necesidad de utilizar la definición. Para funciones compuestas, es de gran utilidad la regla de la cadena, mientras que en aquellos casos en que no es posible despejar la función, debemos optar por la derivación implícita. Finalmente hemos presentado la regla de l'Hôpital para la resolución de límites funciones. Esta regla, basada en la derivación, es una de las más comúnmente utilizadas para resolver límites.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. M. Ortega (1990): "Introducción al Análisis Matemático", Manuales de la Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

[2] V.A. Kudryasvtsev and B.P. Demidovich (1981): "A brief course of Higher Mathematics", Mir Publishers, Moscú, p. 159-196.

[3] T.A. Apostol (1981): "Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal", Reverté, Barcelona, p. 191-218.

[4] M. R. Spiegel (1970): "Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas", Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, Mexico, p. 53-56.

[5] R. Calm, N. Coll, y M.R. Estela (1992): "Problemas de cálculo", Micromar, Barcelona, p. 66-106.

[6] R. Courant and F. John (1976): "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Limusa, México, p. 177-205 y 223-243.

[7] S. Martín Monlleví (2000): "Las ideas básicas del cálculo", Ediuoc, Barcelona, p. 17-35.

[8] B. Demidovich (1978): "Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático", Paraninfo, Madrid, p. 41-71.

[9] T.M. Apostol (1979): "Análisis Matemático", Reverté, Barcelona, p. 125-151.

ENLACES

[W1] http://www.satd.uma.es/matap/sveral
Página web de Salvador Vera Ballesteros, profesor del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la Universidad de Málaga. Contiene apuntes y problemas sobre derivación de funciones reales de una variable.

[W2] http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/cie_mat_calculo/apuntes.html
Apuntes, ejercicios, exámenes y prácticas de derivación en una dimensión.

[W3] http://www.monografias.com/trabajos11/monogrr/monogrr.shtml
Artículo sobre la didáctica de las matemáticas en ingeniería. Trata de la derivación.

[W4] http://math.uprm.edu/
Resumen conciso de las propiedades de las series de potencias. Incluye derivación e integración.

[W5] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/apuntes/
Apuntes de series de derivadas.

[W6] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/problemas/
Problemas y ejercicios de derivadas.

[W7] http://planetmath.org/encyclopedia/Derivative2.html
Página web de PlanetMath.org dedicada a la derivación. Se trata de un resumen muy preciso en inglés.

[W8] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/deriva/default.htm
Apuntes sobre el cálculo de la derivada.

[W9] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/varios/derivabilidad.htm
Apuntes sobre derivabilidad de una función.

[W10] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/deri_conc/default.htm
Apuntes sobre aspectos geométricos de la derivada.

[W11] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/funciones_derivables/default.htm
Apuntes sobre funciones derivables.