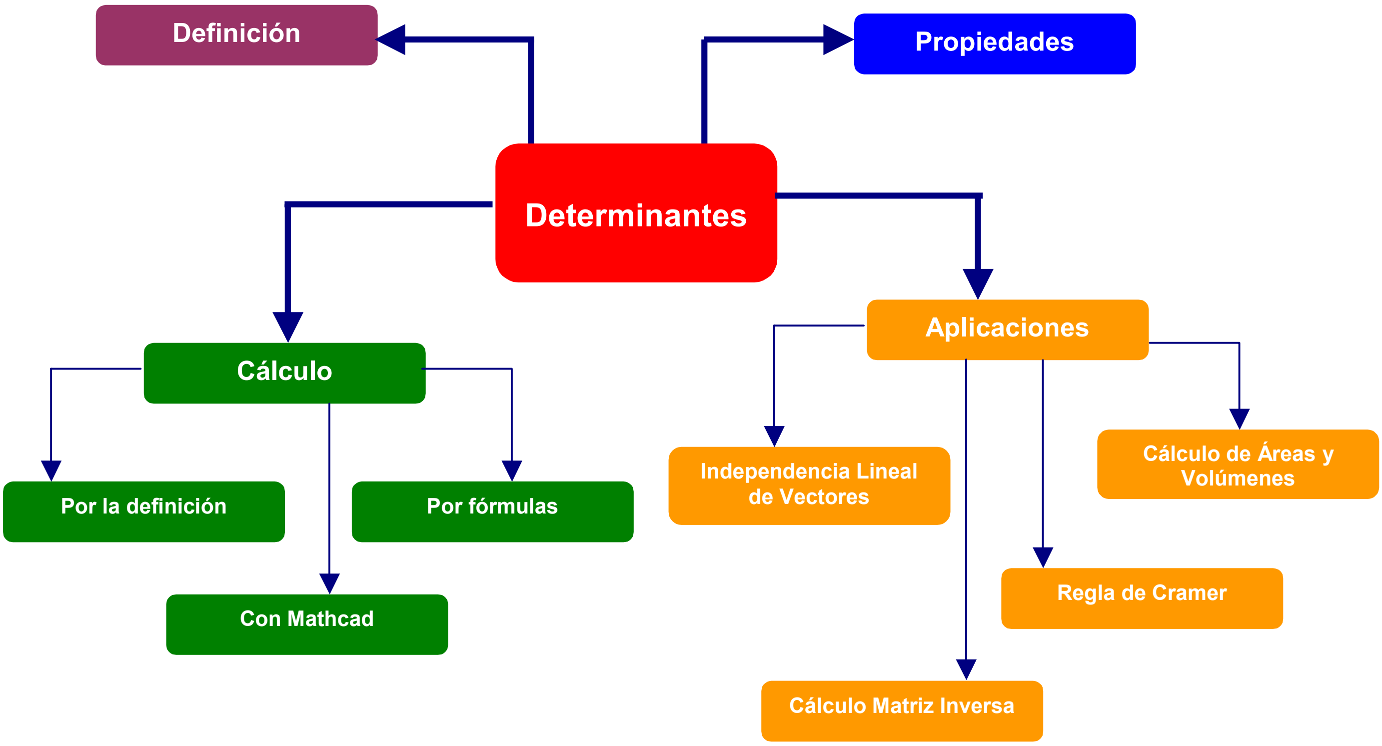
DETERMINANTES

Autores: Juan Alberto Rodríguez Velázquez (jrodriguezvel@uoc.edu), Cristina Steegmann Pascual (csteegmann@uoc.edu), Ángel Alejandro Juan Pérez (ajuanp@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

El concepto de determinante de una matriz cuadrada tiene una gran relevancia dentro de la teoría de matrices. Los determinantes resultan de gran utilidad a la hora de resolver determinados sistemas de ecuaciones lineales (los llamados sistemas de Cramer), discutir la existencia de solución de sistemas de ecuaciones lineales generales (mediante el concepto de rango de una matriz y del Teorema de Rouché Frobenious), y analizar la dependencia lineal de un conjunto de vectores (lo cual, entre otras cosas, nos permitirá identificar posibles bases de un espacio vectorial). Además, la interpretación geométrica de los determinantes nos permite calcular, de forma sencilla, áreas y volúmenes de determinadas figuras geométricas, realizar productos vectoriales, y hallar las ecuaciones de un plano en el espacio.

Los campos de aplicación de la teoría de los determinantes y, en general, de la teoría de matrices son muy amplios, y abarcan desde las más clásicas aplicaciones en las áreas de física, economía, e ingeniería hasta aplicaciones más recientes como la generación de gráficos por ordenador, la teoría de la información [W1], y la criptografía.

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

OBJETIVOS

- Aprender a calcular determinantes de todos los órdenes.
- Conocer las propiedades de los determinantes.
- Comprobar cuáles son las aplicaciones de los determinantes.
- Introducirse en el uso del Mathcad para trabajar con determinantes.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable haber leído, previamente, el math-block sobre álgebra de matrices así como los introductorios a Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Definición de determinante

Dados los números 1,2,3,....n existen n! formas distintas de ordenarlos. Cada una de dichas ordenaciones se llama **permutación**. El conjunto de todas las permutaciones se representa por P_n y la permutación (1, 2, 3, ..., n) se llama **permutación principal**.

Por ejemplo, el conjunto {(1 2 3), (1 3 2), (2 1 3), (2 3 1), (3 1 2), (3 2 1)} contiene las 6 permutaciones diferentes de la terna (1 2 3).

Diremos que dos elementos de una permutación forman una **sucesión** si están colocados en el mismo orden que en la permutación principal. En caso contrario, diremos que forman una **inversión.**

Por ejemplo: (2 3 1 4 5 6) tiene dos inversiones (nº de pasos a realizar para obtener la permutación principal).

Llamaremos **signatura** de una permutación al valor $(-1)^{\lambda}$ donde λ es el número de inversiones de dicha permutación.

Se define el **determinante** de una matriz <u>cuadrada</u> A, denotado por $|A|$ o por det(A), como:

$$\text{Si} \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = \sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) \in P_n} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n} \cdot signatura(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)$$

[W2]

Cálculo de determinantes

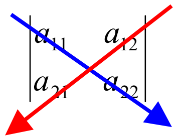
Determinantes de orden 2 (asociados a matrices 2x2)

Cuando A es una matriz 2x2 hay 2! = 2 permutaciones del par (1 2); éstas son: {(1 2), (2 1)}. Entonces, el determinante de A contendrá los dos términos:

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot signatura(1\ 2) \qquad \text{y} \qquad a_{12} \cdot a_{21} \cdot signatura(2\ 1)$$

Como signatura(1 2) = $(-1)^0$ = 1 y signatura(2 1) = $(-1)^1$ = -1, el determinante de **orden** 2 será:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$



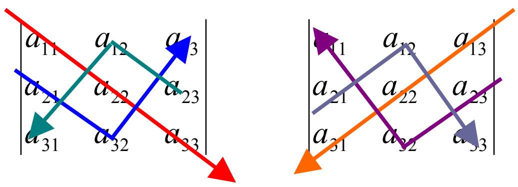
Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2.(-4) - 5.3 = -8 - 15 = -23$$

Determinantes de orden 3 (asociados a matrices 3x3)

Si A es una matriz 3x3, su determinante (de orden 3) vendrá dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$



Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1.(-2).5 + 3.(-1).(-3) + 4.4.1 - [(-3).(-2).4 + 1.(-1).1 + 3.4.5] =$$

$$= -10 + 9 + 16 - [24 + (-1) + 60] = 15 - 83 = -68$$

<u>Determinantes de orden superior a 3 (asociados a matrices nxn con n>3)</u>

En el caso de determinantes de orden superior a 3 (es decir, asociados a matrices de tamaño nxn con n > 3), la expresión resultante tiende a complicarse, por lo que recurriremos al método de **desarrollo por adjuntos** para su cálculo.

Primero de todo, fijémonos en la disposición de signos siguientes (similar a las casillas blancas y negras en un tablero de ajedrez):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante de una matriz 4x4 (o superior) se debe hacer:

1. Elegir aquella fila o columna que tenga el mayor número de ceros (si ninguna línea tiene ceros, se coge una línea cualquiera).

2. Cada uno de los elementos de la línea dará lugar a un sumando, el cual se obtendrá como se explica en el paso siguiente.

3. Para cada elemento de la línea seleccionada, éste se multiplica por su correspondiente determinante adjunto (aquel determinante resultante de eliminar la fila y la columna a las que pertenece el elemento seleccionado). A dicho adjunto le precederá el signo que corresponda a la posición ocupada por el elemento seleccionado (según la tabla de signos arriba indicada).

Ejemplo matriz 4x4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ 3 & -2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{elegimos la } 1^{\text{a}} \text{ columna y la desarrollamos}\} = \begin{vmatrix} 1^{+} & 1 & 3 & -2 \\ 2^{-} & -4 & 7 & 2 \\ 3^{+} & -2 & 9 & -1 \\ 1^{-} & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 7 & 2 \\ -2 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & 7 & 2 \\ -2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \ldots = 15$$

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

Ejemplo matriz 5x5:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \{\text{desarrollamos por la 2ª fila}\} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0^{-} & 0^{+} & 0^{-} & 1^{+} & 1^{-} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

= {al multiplicar por 0, los 3 primeros sumandos se eliminan; el último determinante también se anula} =

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \{\text{desarrollamos por la 2ª línea}\} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

= {los dos primeros determinantes se anulan mutuamente, pues son iguales pero de signo cambiado; el último determinante también se anula} =

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\left[2.1.4 + 1.3.(-1) + 2.2.3 - \left((-1).1.3 + 2.2.3 + 4.2.1 \right)\right] =$$

$$= -\left[8 - 3 + 12 - (-3 + 12 + 8)\right] = -\left[17 - 17\right] = 0$$

Propiedades de los determinantes [W3]

Para el cálculo de algunos determinantes, puede ser muy útil recurrir a algunas de las siguientes propiedades:

1. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

   Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

2. Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas paralelas (filas o columnas), el signo de su valor también cambiará.

   Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{en efecto:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

3. Un determinante que tiene dos líneas paralelas (filas o columnas) iguales vale 0.

   Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4. Si un determinante tiene todos los elementos de una línea nulos, el determinante vale 0.

   Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

5. Multiplicar un determinante por un nº real es equivalente a multiplicar cualquier linea (fila o columna) por dicho número.

   Por ejemplo,

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\cdot 2 \\ 0 & 0 & 1\cdot 2 \\ 1 & 0 & 0\cdot 2 \end{vmatrix}$$

   Dada una matriz A de tamaño nxn, y un nº real λ, esta propiedad implica que:

$$|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$$

6. Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes.

   Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4+5 & 3 \\ 0 & 3+3 & 2 \\ 0 & 1+2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

7. Si los elementos de una línea son combinación lineal de las otras, entonces, el determinante vale 0.

   Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3+2\cdot 1 & 3 \\ 2 & 0+2\cdot 2 & 0 \\ 3 & 1+2\cdot 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (la 2ª columna es combinación lineal de la 1ª y 3ª columna).

8. Si a los elementos de una línea se le suman los elementos de otra paralela multiplicados previamente por un nº real el valor del determinante no varia.

   Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 5+2\cdot 1 & 3 \\ 2 & 3+2\cdot 2 & 0 \\ 3 & 4+2\cdot 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

9. El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de cada una de ellas.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

La función determinante con Mathcad

Estamos familiarizados con funciones como f(x)=senx y $f(x)=x^2$, que asocian un número real f(x) a un valor real de la variable x. Como x y f(x) asumen valores reales, tales funciones se describen como "funciones con valores reales de una variable real". La **función determinante** es también una "función con valores reales de una variable matricial" en el sentido de que asocia un número real f(X) con una matriz X **[6].**

El estudio de la función determinante tiene importantes aplicaciones en la teoría de sistemas de ecuaciones lineales y también conduce a una fórmula explícita para calcular la inversa de una matriz invertible.

La función determinante en Mathcad es una aplicación del conjunto de matrices cuadradas en el conjunto de escalares **[3].**

Dicha función tiene como entrada (**input**) una matriz cuadrada y como salida (**output**) un escalar.

El determinante de una matriz cuadrada, utilizando Mathcad, se puede hallar mediante el icono $|x|$ de la barra de herramientas **Matrix** (si en vez de la matriz se pone un escalar, este mismo icono también proporciona el **valor absoluto** de éste). Además, el determinante de una matriz también puede ser calculado con el icono $|\mathbf{M}|$ de la barra de herramientas **Symbolic** **[4]**, **[5].**

Por ejemplo, si se quiere calcular el derterminante de la matriz A:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

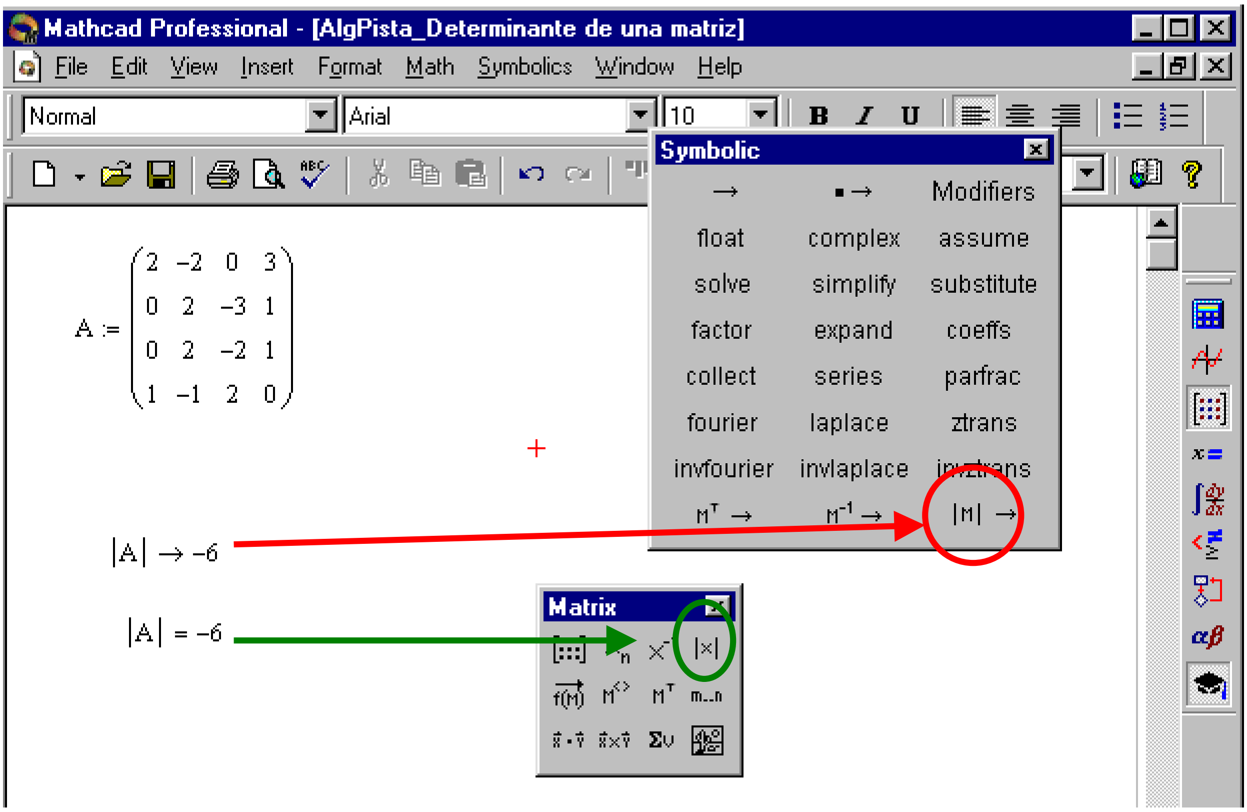
$$|A| \rightarrow -6$$

$$|A| = -6$$

Incluso, si lo que se desea es calcular el determinante de una matriz con parámetros, podemos ayudarnos del icono $|M|$ de la barra de herramientas **Symbolic** para ello. Veamos un sencillo ejemplo:

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| \rightarrow a\cdot d - b\cdot c$$

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)



❑ Determinantes e independencia lineal de vectores [3]

El uso de determinantes proporciona un método de sencillo para comprobar cuando **n** vectores de $\mathbf{R}^m$ son linealmente independientes.

Sea M la matriz cuyas columnas son los vectores dados. M es una matriz **m** por **n**. Las columnas son **linealmente dependientes** si y sólo si existe un vector de dimensión **n** (diferente del vector nulo) tal que: M.x=0; esto es:

$$M.x = x_1.M^{<1>} + x_2.M^{<2>} + \ldots + x_n.M^{<n>} = 0$$

(Nótese que $M^{<j>}$ es la j-ésima columna de M).

En caso contrario; si sólo existe el vector nulo, los vectores son **linealmente independientes.**

Recordemos que M.x=0 tendrá una solución no-trivial (por no-trivial entendemos que algún coeficiente de ésta es diferente de cero) si y sólo si, por lo menos una de las variables o incógnitas es libre; esto es, una de las variables puede tomar cualquier valor.

Además, la ecuación matricial M.x=0 da lugar a un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Sabemos que éste siempre tendrá, por lo menos, una solución (la trivial). Si éste tiene más de una solución, entonces posee un infinito número de soluciones.

El proceso para saber si unos vectores son linealmente dependientes o independientes es el siguiente:

Poner los vectores en columnas y formar la matriz M.

Hallar la solución del sistema M.x=0, mediante la función "rref".

Si la solución es la trivial, los vectores son linealmente independientes. En caso contrario, si el sistema tiene solución diferente de la trivial, los vectores son linealmente dependientes.

No obstante esto, el uso de determinantes proporciona un método de sencillo para comprobar cuando **n** vectores de $\mathbf{R^m}$ son linealmente dependientes o independientes.

- **El caso en que n>m**

Teorema: Si n>m, cualquier conjunto de n vectores de $\mathbf{R^m}$ son linealmente dependientes.

Fijémonos que, en este caso, hay más columnas que filas. Esto significa que en la matriz reducida por filas (rref), por lo menos, una columna corresponderá a una variable libre. Y, por tanto, existe una solución diferente de cero para la ecuación matricial M.x = 0.

Ejemplo: Supongamos que tenemos 4 vectores de R^3 y queremos saber si éstos son linealmente dependientes o independientes.

Buscaremos la solución a la ecuación M.x = 0.

Los vectores son:

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$w := \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$j := \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rref}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

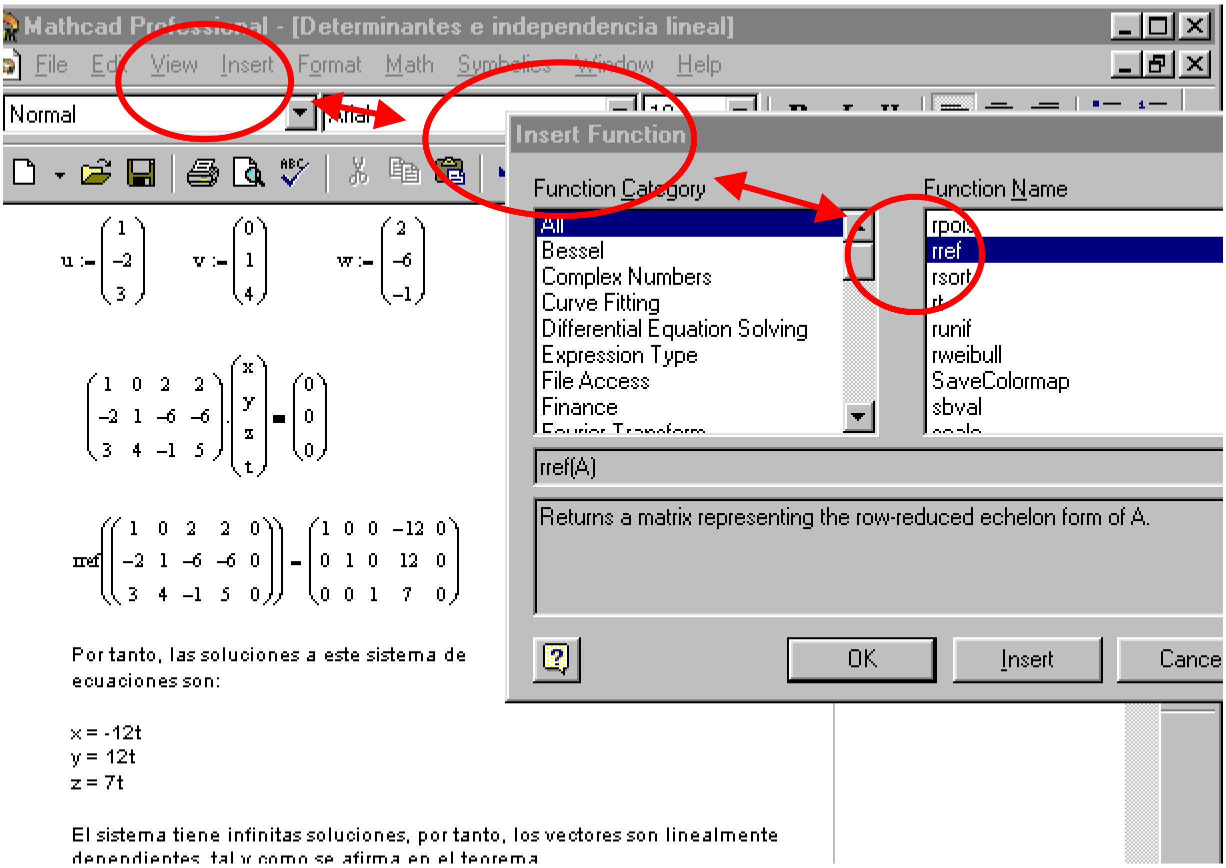
Por tanto, las soluciones a este sistema de ecuaciones son:

x = -12t
y = 12t
z = 7t

El sistema tiene infinitas soluciones, por tanto, los vectores son linealmente dependientes, tal y como se afirma en el teorema.

Observación: En la función anterior (rref) hemos utilizado la matriz ampliada del sistema. Como la matriz de los coeficientes está ampliada con una columna formada toda por ceros, las operaciones de las filas no cambiarán. Por tanto, aquí podríamos haber utilizado perfectamente la matriz de los coeficientes e interpretar el resultado de manera similar:

$$\operatorname{rref}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -6 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$



- <u>**El caso en que n<m**</u>

<u>**Teorema**</u>: M.x=0 tiene como única solución la trivial si y sólo si M^T.M.x=0 tiene como única solución la trivial.

Obviamente cualquier solución de M.x=0 lo es de M^T.M.x=0; esto es, sus conjuntos de soluciones coinciden. Si la trivial es la única solución para una ecuación, ésta debe ser la única solución para la otra.

Según el teorema anterior, que M.x=0 tenga solución es equivalente a decir que M^T.M.x=0 también tenga solución. Por lo tanto, es equivalente a que existe la inversa de M^T.M (fijémonos que $M^T.M$ es una matriz cuadrada n por n). Por tanto, equivalente a que $|M^T.M|$ es diferente de cero; esto es, no se anula el determinante de $M^T.M$

**<u>Conclusión</u>: Sean $M^{<1>}, M^{<2>}, \ldots, M^{<n>}$ n vectores de R^m con $n<m$.
Entonces $M^{<1>}, M^{<2>}, \ldots, M^{<n>}$ son linealmente independientes si y sólo si $|M^T.M|$ es diferente de cero.**

Ejemplo: Sean los vectores de R^5:

$$m1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$m3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

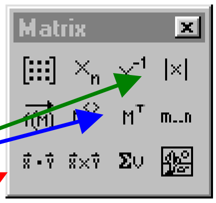
$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|M^T \cdot M\right| = 875$$

Por tanto, los vectores anteriores son linealmente independientes.

$$m1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad m2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad m3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\left| M^T \cdot M \right| = 875$$

- <u>**El caso en que n=m**</u>

En este caso, M es una matriz cuadrada y el sistema homogéneo M.x=0 tendrá una única solución trivial (y los vectores serán linealmente independientes) si es compatible determinado. Por tanto, si existe la inversa de la matriz M, esto es equivalente a que el determinante de la matriz M sea diferente de cero.

<u>Conclusión</u>: Los vectores son linealmente independientes si y sólo si el determinante de M es diferente de cero.

Ejemplo: Sean los vectores de R^4:

$$v1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

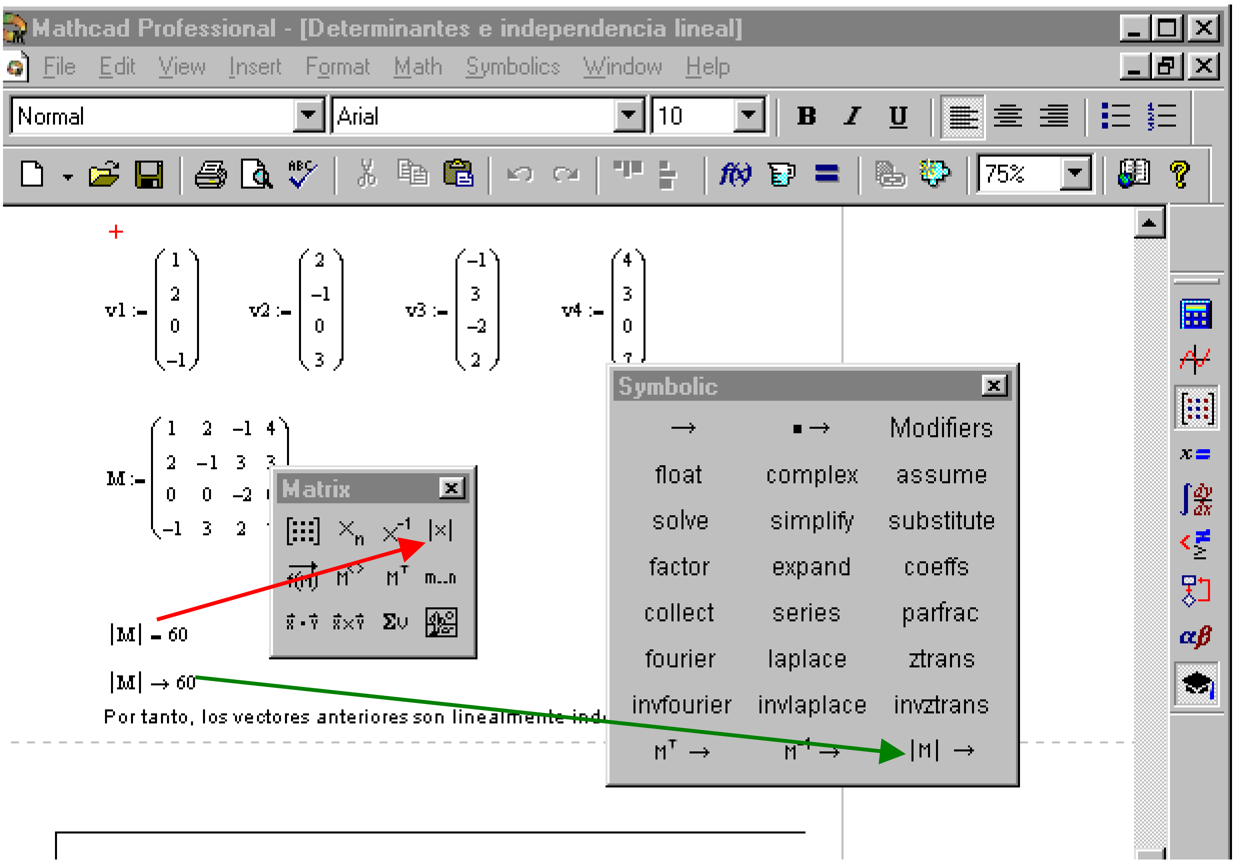
$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Comprobemos que los resultados obtenidos utilizando el comando de la barra de herramientas **Matrix** y los obtenidos mediante la barra **Symbolic** coinciden:

$|M| = 60$
(Utilizando el comando de **Matrix)**

$|M| \rightarrow 60$
(Utilizando el comando de **Symbolics**)

Por tanto, los vectores anteriores son linealmente independientes.



RECAPITULANDO:

Sean $M^{<1>}$, $M^{<2>}$, ..., $M^{<n>}$ n vectores de R^m.

Si n>m, entonces cualquier conjunto de n vectores de R^m son linealmente dependientes.

Si n<m, entonces $M^{<1>}$, $M^{<2>}$, ... , $M^{<n>}$ son linealmente independientes si y sólo si $|M^T.M|$ es diferente de cero.

Si n=m, entonces $M^{<1>}$, $M^{<2>}$, ... , $M^{<n>}$ son linealmente independientes si y sólo si $|M|$ es diferente de cero.

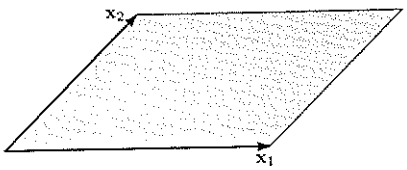
Determinantes y áreas y volúmenes [W6]

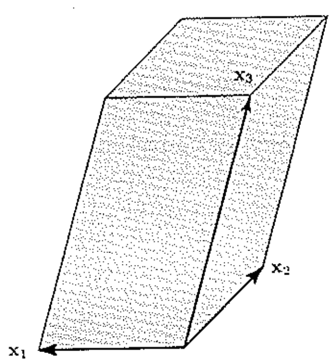
La definición de un determinante que se ha visto hasta ahora es puramente algebraica, sin embargo existe una concreta interpretación geométrica.

Definiciones [1]

Un sólido en R^m con las caras opuestas paralelas, cuyos lados adyacentes están definidos por vectores de un conjunto linealmente independiente $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ se llama **paralelepípedo** n-dimensional.

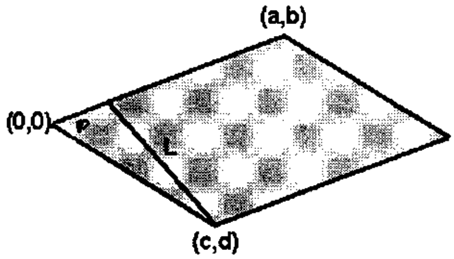
Como se representa en la figura siguiente, un paralelepípedo bidimensional es un **paralelogramo** y un paralelepípedo tridimensional es un **cubo rectangular torcido.**





Área de un paralelogramo [3]

Consideremos el paralelogramo siguiente cuyos lados son los vectores (a, b) y (c, d):



Geométricamente es fácilmente visible que el área del paralelogramo es igual a la longitud de la línea L por la longitud de la línea que va desde (0, 0) hasta (a, b). La longitud de L es sin φ por la longitud de la línea que va desde (0, 0) hasta (c, d).

Según esto, el área del paralelogramo es igual a:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \sin\varphi$$

Sin embargo y, según lo visto anteriormente, el área del paralelogramo se puede calcular como el valor absoluto del determinante cuyas filas son los lados de éste; es decir:

$$\boxed{A = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|}$$

Ejemplos:

- El área del paralelogramo determinado por los vectores (4, 0) y (7, 5) son 20 unidades cuadradas.

  $$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

  $$|A| \rightarrow 20$$

- El área del paralelogramo determinado por los vectores (5, 3) y (7, -2) son 31 unidades cuadradas.

  $$A := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

  $$|A| \rightarrow -31$$

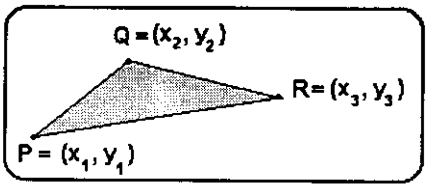
- El área del paralelogramo determinado por los vectores (1, 7) y (3, 2) son 19 unidades cuadradas.

  $$A := \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  $$|A| \rightarrow -19$$

- **Área de un triángulo** [3]

Sea el triángulo siguiente del cual se conocen las coordenadas de sus tres vértices:



El área de dicho triángulo es igual a:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

(Observación: Fijémonos que el triángulo es la mitad del paralelogramo)
Ejemplos:

- El área del triángulo de vértices P=(2, 3), Q=(-4, 7) y R=(1, 0) son 11 unidades cuadradas.

  $$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  $$|A| \rightarrow 22$$

  Área = 11 unidades cuadradas

- El área del triángulo de vértices P=(-12, 3), Q=(5, 7) y R=(0, 2) son 32,5 unidades cuadradas.

  $$A := \begin{pmatrix} -12 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  $$|A| \rightarrow -65$$

  Área = 32,5 unidades cuadradas

- **Volumen de un paralelepípedo** [3]

Cuando la matriz A $\in$ R^{mxn} tiene las columnas linealmente independientes, el volumen del paralelepípedo n-dimensional generado por las columnas de la matriz A es

$$\mathbf{V_n = [det\ (A^t \cdot A)]^{1/2}}$$

donde A^t es la traspuesta de la matriz A y se lee así: "La raíz cuadrada positiva del determinante del producto de la traspuesta por la matriz".

En particular, si la matriz A es cuadrada, entonces el volumen es

$$V_n = |\det(A)|$$

y se lee así: "El valor absoluto del determinante de la matriz A".

- **Volumen de un paralelepípedo tridimensional** [3]

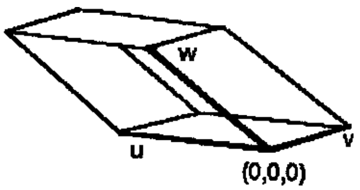
En R^3 consideremos el paralelepípedo generado por los tres vectores:

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

El volumen de dicho paralelepípedo es el valor absoluto del determinante cuyas filas son los vectores u, v y w.

$$V = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \right\|$$

Cabe destacar que no tiene ninguna importancia el hecho de poner los vectores en las filas o en columnas ya que se debe hallar el determinante y, por una de las propiedades anteriores se ha visto que el determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden.



Ejemplos:

- si u=(2, 0, 0), v=(0, 3, 0), w =(0, 0, 5); entonces:

$$V = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{matrix} \right\| = \|30\| = 30 \text{ unidades cúbicas.}$$

- si u=(1, 4, 2), v=(3, -2, 2), w=(-2, 5, 0); entonces

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|V| \to -4$$

El volumen serán 4 unidades cúbicas pues se debe tomar el valor absoluto.

- si u=(1, 3, 5), v=(0, 3, 5), w=(0, 0, 5); entonces

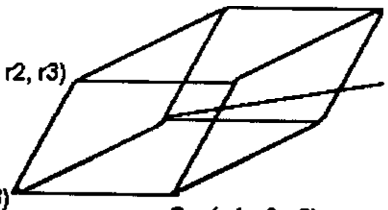
$$V := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|V| \rightarrow 15$$

El volumen son 15 unidades cúbicas.

- **<u>Volumen de un paralelepípedo tridimensional a partir de cuatro de sus vértices</u> [3]**

Sean los puntos P, Q, R, S que determinan el paralelepípedo siguiente:



Ampliando el resultado obtenido en el cálculo del área de un triángulo, podemos afirmar que el volumen de dicho paralelepípedo es:

$$V = \left\| \begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & 1 \end{matrix} \right\|$$

Observemos que también se podría haber hecho de la siguiente manera:

A partir de los puntos se hallan los vectores $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PS}$ y se halla su determinante, tal como se ha explicado anteriormente.

Ejemplo:

El volumen del paralelepípedo determinado por los puntos siguientes:

P= (0, 0, 0)
Q= (1, 4, 2)
R= (3, -2, 2)
S= (-2, 5, 0)

es 4 unidades cúbicas.

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|V| \to -4$$

Fijémonos que coincide con el valor del volumen si se halla éste mediante los vectores PQ, PR y PS:

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|V| \to -4$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Carl D. Meyer´s (2000): "Matrix analysis and applied linear algebra", Philadelpia SIAM, 461, 468-470

[2] Montes Lozano, A (1998): "Álgebra", Ediciones UOC, Módulo 3: "Matrices, vectores y sistemas de ecuaciones lineales", 45-48, 41-43, 43-45

[3] G. J. Porter, D. R. Hill (1996): “Interactive Linear Algebra. A laboratory course using Mathcad”, Springer-Verlag New York, Inc., Section 3.1, 3.2, 3.3

[4] H. Benker (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc., 178-180

[5] J. A. Moreno, D. Ser (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A., 155, 296.

[6] H. Anton, C. Rorres (2000): "Elementary Linear Algebra: Applications Version", John Wiley&Sons.

ENLACES

[W1] *http://www.planetmath.org/encyclopedia/LinearAlgebra.html*

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre álgebra lineal. En inglés.

[W2] *http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html*

Página web de la "Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES" en donde se explica, con gran cantidad de ejemplos aclaratorios, diferentes conceptos todos ellos relacionados con las matrices y los determinantes. En español.

[W3] *http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/matr-dete/*

El sitio de los estudiantes y docentes universitarios. Recopilación de apuntes, con ejemplos, sobre matrices y determinantes. En español.

[W4] *http://dirdoc.ucv.cl/lineal/cap1/ejer5c.html*

Serie de ejercicios de matrices y determinantes. En español.

[W5] *http://rinconprog.metropoliglobal.com/CursosProg/ProgGraf/MatGraf/index.php?cap=3*

Página web de "El Rincón del Programador". En la sección de "Programación Gráfica" aparecen los "Fundamentos matemáticos de la Informática Gráfica" en donde se explican diversos conceptos relacionados con los determinantes. En español.

[W6] http://www.richland.cc.il.us/james/lecture/m116/matrices/applications.html

Página web con aplicaciones de matrices y determinantes. En inglés.

[W7] http://www.math.unl.edu/~tshores/linalgtext.html

Página web del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nebraska-Lincoln. Libro on-line sobre álgebra lineal y sus aplicaciones. En inglés.

[W8] http://www.numbertheory.org/book/

Página web sobre teoría de números. Libro on-line sobre álgebra lineal. En inglés.

[W8] http://archives.math.utk.edu/topics/linearAlgebra.html

Página web de enlaces relacionados con álgebra lineal y teoría de matrices. En inglés.

[W9] http://www.tu-chemnitz.de/iic/ela/

Página web de la publicación "The Electronic Journal of Linear Algebra" publicada por "The International Linear Algebra Society". En inglés.

[W10] http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/la-sw.html

Página en la que está recogida la información relacionada con el software disponible gratuitamente en la red para la solución de problemas de álgebra lineal. En inglés.

[W11] http://ceee.rice.edu/Books/LA/linearbook.pdf

Página web del "Center for Excellence and Equity in Education" de la Universidad de Rice. Libro sobre álgebra lineal. En inglés.