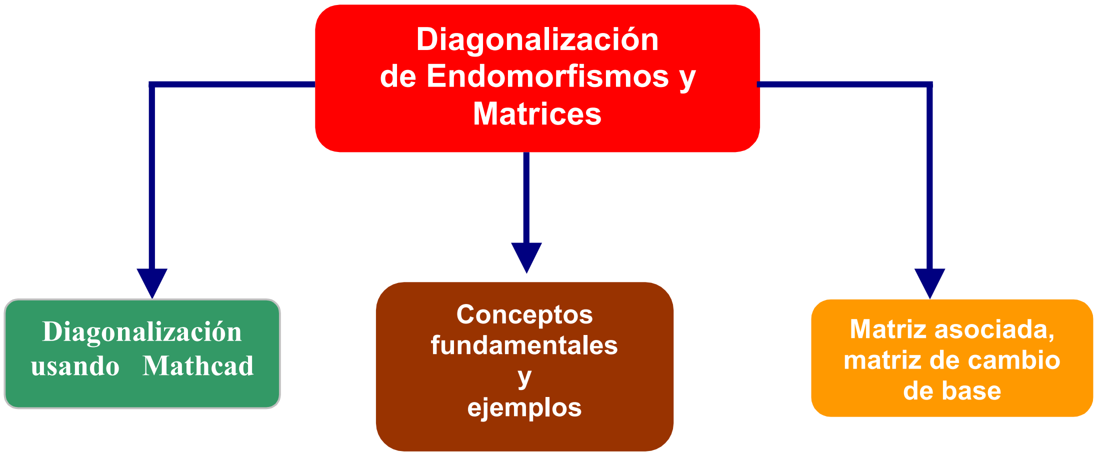
DIAGONALIZACIÓN

Autores: Juan Alberto Rodríguez Velázquez (jrodriguezvel@uoc.edu) Cristina Steegmann Pascual (csteegmann@uoc.edu)

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

En este *math-block*, como su título indica, se estudia el problema de la diagonalización de endomorfismos y matrices. Dicho estudio está estrechamente vinculado a los conceptos de matriz asociada a una aplicación lineal y matriz de cambio de base; es por ello que dedicamos la primera sección al análisis de las relaciones existentes entre estas matrices. En la segunda sección analizamos el problema de la diagonalización de endomorfismos y matrices y presentamos los resultados necesarios para el estudio de dicho problema. Los ejemplos ilustrativos de los principales resultados presentados en el *math-block* están agrupados en la cuarta sección. Por último, presentamos la diagonalización de algunas matrices utilizando el programa Mathcad como herramienta de cálculo.

OBJETIVOS

- Conocer la relación existente entre las matrices asociadas a una misma aplicación lineal en diferentes bases.
- Conocer el método de cálculo de los valores y vectores propios de un endomorfismo (matriz)
- Saber determinar si un endomorfismo (matriz) es diagonalizable.
- Saber determinar una base propia y la matriz diagonal de un endomorfismo diagonalizable.

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

- Mostrar las posibilidades que brinda el programa Mathcad para el estudio de la diagonalización de endomorfismos y matrices.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable haber leído, previamente, los *math-blocks* relativos a:

- Álgebra de matrices.
- Determinantes.
- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Aplicaciones lineales.
- Espacios vectoriales.
- Además, recomendamos los introductorios a Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Matriz asociada a una aplicación lineal

Sea f una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita:

$$f : E_n \to E_m$$
$$x \to f(x)$$

Sean $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$ bases de E_n y E_m respectivamente. Llamamos *matriz asociada* a f en las bases A y B a la matriz $(\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}$ cuyos elementos α_{ij} son la coordenada i del vector $f(a_j)$ en la base B. Denotamos esta matriz por $M[f, A, B]$.

Es decir, si $f(a_j) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$, entonces $f(a_j)$ es la columna j de la matriz $M[f, A, B]$.

Consideremos la siguiente aplicación lineal $f : R^3 \to R^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (2x + y, y + z)$$

Vamos a calcular la matriz asociada a f en las bases canónicas. En este caso la matriz asociada se obtiene calculando la imagen de los vectores de la base del espacio de partida y poniéndolas en columnas:

$$f(1,0,0) = (2,0);$$
$$f(0,1,0) = (1,1);$$
$$f(0,0,1) = (0,1).$$

Entonces, la matriz asociada es

$$M[f, C_3, C_2] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nótese que la matriz asociada actúa como la aplicación lineal de la siguiente forma:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x + y, y + z).$$

Esto quiere decir que podemos estudiar la aplicación lineal a partir de su matriz asociada. Naturalmente, si cambiamos las bases obtenemos otra matriz asociada.

Consideremos ahora la aplicación lineal de antes y las bases $A((1,0,0),(1,-1,0),(0,0,1))$ y $B = ((2,0),(1,-1))$ de R^3 y R^2 respectivamente. Vamos a determinar la matriz $M[f, A, B]$.

Las imágenes de los vectores de la base de partida son:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (2,0); \\ f(1,-1,0) &= (1,-1); \\ f(0,0,1) &= (0,1). \end{aligned}$$

La matriz de cambio de base de B a la canónica es

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base de la canónica a B es

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, obtenemos las coordenadas de los vectores imágenes en la base de llegada:

$$\begin{aligned} (2,0)_B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0); \\ (1,-1)_B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0,1); \\ (0,1)_B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}, -1\right). \end{aligned}$$

Colocamos los vectores $(2,0)_B$, $(1,-1)_B$ y $(0,1)_B$ en columna y obtenemos la matriz asociada,

$$M[f, A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora como se relacionan ambas matrices y las matrices de cambio de base.

La matriz de cambio de base, de la base A a la canónica es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base, de la base la canónica a la base A es P^{-1}, que en este caso en concreto coincide con P.

¿Cómo actúan estas matrices?

$M[f, A, B]$: Transforma los vectores de R^3, cuyas coordenadas estén expresadas en la base A, $x_A \in R^3$, en su imagen por la aplicación f, cuyas coordenadas están expresadas en la base B de R^2, $(f(x_A))_B \in R^2$.

$M[f, C_3, C_2]$: Transforma los vectores de R^3, cuyas coordenadas estén expresadas en la base canónica, $x_{C3} \in R^3$, en su imagen por la aplicación f, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica de R^2, $\left(f(x_{C_3})\right)_{C2} \in R^2$.

P: Transforma vectores de R^3, cuyas coordenadas están expresadas en la base A, $x_A \in R^3$, en ellos mismos pero con las coordenadas expresadas en la base canónica, $x_{C3} \in R^3$.

Q^{-1} :Transforma vectores de R^2, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica, $y_{C2} \in R^2$, en ellos mismos pero con las coordenadas expresadas en la base B, $y_B \in R^2$.

Entonces, el siguiente diagrama conmutativo nos permite relacionar estas matrices:

$$\begin{tikzcd}
(R^3, C_3) \arrow[r, "{M[f, C_3, C_2]}"] & (R^2, C_2) \arrow[d, "Q^{-1}"] \\
(R^3, A) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "{M[f, A, B]}"'] & (R^3, B)
\end{tikzcd}$$

O lo que es igual:

$$M[f, A, B] = Q^{-1} \cdot M[f, C_3, C_2] \cdot P.$$

Esto es,

$$M[f, A, B] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En general, sea f una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita:

$$f : E_n \to E_m$$
$$x \to f(x)$$

Sean A y A' bases de E_n y sean B y B' bases de E_m. Se cumple la siguiente relación:

$$M[f, A, B] = Q^{-1} \cdot M[f, A', B'] P,$$

donde P es la matriz de cambio de base de A a A' y Q es la matriz de cambio de base de B a B'.

Diagonalización

Diremos que una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo es un *endomorfismo*. La matriz asociada a un endomorfismo definido en un espacio vectorial de dimensión n es una matriz cuadrada de orden n.

Si se pretende estudiar un endomorfismos a partir de su matriz asociada, resultará conveniente averiguar si existe una base tal que la matriz asociada respecto a dicha base sea la más simple posible; una matriz diagonal. Si existe tal base, se dice que el endomorfismo es *diagonalizable*.

Sea f un endomorfismo definido en un espacio vectorial E de dimensión n. Denotaremos la matriz asociada a f en la base canónica de E de la siguiente forma: $M[f, C] = M[f, C, C]$.

Supongamos que $M[f, C]$ es una matriz diagonal:

$$M[f, C] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Veamos qué condiciones se deben cumplir para que exista esta matriz:

En primer lugar,

$$f(e_1) = \lambda_1 e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n = \lambda_1 e_1$$
$$f(e_2) = 0 \cdot e_1 + \lambda_2 e_2 + 0 \cdot e_3 + \cdots + 0 \cdot e_n = \lambda_2 e_2$$

....

....

$$f(e_n) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \lambda_n e_n$$

En resumen, $f(e_i) = \lambda_i e_i, \quad \forall i : \; i \in \{1, \ldots, n\}$.

Diremos que un vector no nulo x de un espacio vectorial E es un *vector propio* del endomorfismo f, definido en E, si existe $\lambda \in R$ tal que $f(x) = \lambda x$. En ese caso se dice que λ es un *valor propio* de f y que x es un vector propio asociado al valor propio λ.

Un vector no nulo x de un espacio vectorial real E, de dimensión n, es un *vector propio* de la matriz cuadrada M, de orden n, si existe $\lambda \in R$ tal que $Mx^t = \lambda x^t$. En ese caso, se dice que λ es un *valor propio* de M y que x es un vector propio asociado al valor propio λ.

Bajo el supuesto de antes (de que $M[f,C]$ es diagonal) concluimos λ_i es un valor propio del endomorfismo f, y de la matriz $M[f,C]$, y que e_i es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_i, \forall i: \ i \in \{1,...,n\}$.

Naturalmente, si en la diagonal de la matriz hay números repetidos entonces existirán valores propios que tendrán más de un vector de la base como vector propio asociado. En cambio, a cada vector propio le corresponde un único valor propio. En efecto, sea $x \in E$ un vector propio y sean $\alpha, \beta \in R$ tales que $f(x) = \alpha x$ y $f(x) = \beta x$. Entonces $(\alpha - \beta)x = 0$ de donde, por ser $x \neq 0$, resulta que $\alpha = \beta$.

Sean ahora dos bases B y B' de E y sean $M[f,B]$ y $M[f,B']$ matrices no necesariamente diagonales. A continuación analizaremos la relación que existe entre los valores y vectores propios de ambas matrices asociadas a f.

Sea $x \in E - \{0\}: \ M[f,B](x_B)^t = \lambda (x_B)^t$, es decir, λ es un valor propio de $M[f,B]$ y x_B es un vector propio de $M[f,B]$ asociado al valor propio λ, cuyas coordenadas están expresadas en la base B. Sea Q la matriz de cambio de la base B' a la base B. Entonces se tiene,

$$
\begin{tikzcd}
(E,B) \arrow[r, "{M[f,B]}"] \arrow[dr, phantom, "///"] & (E,B) \arrow[d, "Q^{-1}"] \\
(E,B') \arrow[u, "Q"] \arrow[r, "{M[f,B']}"'] & (E,B')
\end{tikzcd}
$$

De ahí que,

$$
\begin{aligned}
M[f,B'](x_{B'})^t &= Q^{-1} M[f,B] Q (x_{B'})^t \\
&= Q^{-1} M[f,B] (x_B)^t \\
&= Q^{-1} \lambda (x_B)^t \\
&= \lambda \left(Q^{-1} (x_B)^t \right) \\
&= \lambda (x_{B'})^t
\end{aligned}
$$

Hemos obtenido el siguiente resultado:

Todas las matrices asociadas a un endomorfismo poseen los mismos valores y vectores propios.

Dicho de otro modo, los valores y vectores propios de un endomorfismo coinciden con los valores y vectores propios de cualquiera de sus matrices asociadas.

Veamos ahora cómo determinar los valores y vectores propios.

Sea $x \in E$ un vector propio asociado al valor propio λ. Entonces, se cumple:

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow M[f,C]x^t = \lambda x^t \Leftrightarrow (M[f,C] - \lambda I)x^t = 0,$$

donde I es la matriz unidad y 0 es el vector columna cuyas componentes son cero.

$$(M[f,] - \lambda I)x^t = 0$$

Evidentemente, si consideramos las componentes de x^t como incógnitas obtenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. El vector x no es nulo por ser un vector propio, entonces para que este sistema homogéneo no sea compatible determinado es necesario y suficiente que el determinante de la matriz del sistema sea cero. Esto es,

$$|M[f,C] - \lambda I| = 0$$

Dicho de otro modo, es condición necesaria y suficiente para que un número real λ sea un valor propio del endomorfismo f, que el núcleo del endomorfismo $f - \lambda i$ no sea inyectivo.

Si consideramos λ como una incógnita entonces el determinante $|M[f,C] - \lambda I|$ representa un polinomio de grado n con coeficientes reales, que recibe el nombre de *polinomio característico de la matriz* $M[f,C]$.

Las raíces del polinomio característico son los valores propios de la matriz $M[f,C]$. Como los valores propios son invariantes del endomorfismo (son los mismos para todas las matrices asociadas), el polinomio característico también es un invariante del endomorfismo. Es por eso que el polinomio característico de las matrices asociadas a f es denominado *polinomio característico* de f, y se denota P_f.

Sea λ un valor propio del endomorfismo f. El conjunto $V_\lambda = \{x \in E : \ f(x) = \lambda x\}$ es un subespacio vectorial de E. En efecto,

a) $V_\lambda \neq \phi$ ya que $f(0) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in V_\lambda$.

b) $x, y \in V_\lambda \Rightarrow f(x) = \lambda x \quad \text{y} \quad f(y) = \lambda y$
$$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y)$$
$$\Rightarrow (\mathrm{x}+\mathrm{y}) \in \mathrm{V}_\lambda.$$

c) $x \in V_\lambda, \alpha \in R \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$
$$\Rightarrow (\alpha \mathrm{x}) \in \mathrm{V}_\lambda.$$

El subespacio V_λ recibe el nombre de *subespacio propio* asociado al valor propio λ.

> Proposición [2]
>
> Sean x e y vectores propios de un mismo endomorfismo, asociados a valores propios diferentes, entonces x e y son linealmente independientes.

Dicho de otra forma más fácil: los vectores propios asociados a valores propios diferentes son linealmente independientes.

Si podemos determinar una base de E formada por vectores propios del endomorfismo f, entonces podemos concluir que f *es diagonalizable* y la matriz diagonal es la matriz asociada a f en dicha base. Una base con tales características es denominada *base propia* del endomorfismo.

La pregunta que nos falta por contestar es la siguiente ¿Bajo qué condiciones podemos construir una base propia? La respuesta a esta pregunta nos la da el siguiente teorema:

Teorema [6]
Sea E un espacio vectorial real de dimensión n. Sea $f: E \to E$ un endomorfismo. f es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos propiedades siguientes:

- P_f posee n raíces reales iguales o distintas
- Para cada raíz $\lambda \in R$ de P_f se cumple que $\dim(V_\lambda) = k$, donde k es la multiplicidad de λ.

Por lo tanto, el estudio de la diagonalización de un endomorfismo se reduce a los siguientes pasos:

1. Seleccionamos una base del espacio vectorial
2. Hallamos la matriz asociada respecto a la base seleccionada
3. Determinamos los valores propios.
4. Determinamos el subespacio propio asociado a cada uno de los vectores propios.
5. Verificamos si se cumplen las dos condiciones del teorema anterior.

Toda matriz simétrica es diagonalizable. Además, se puede demostrar que siempre hay una base propia ortonormal. Cuando esto es así, se dice que la diagonalización es ortogonal.

Los vectores propios correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales, por eso cuando una matriz simétrica posee todos los valores propios diferentes se puede asegurar que la base propia es ortogonal.

Si una matriz simétrica posee valores propios repetidos, se puede aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt para obtener una base propia ortogonal. Luego, normalizando los vectores se obtiene la base ortonormal.

En la siguiente sección analizaremos varios ejemplos de diagonalización de endomorfismos y matrices.

Casos prácticos

Ejemplo 1

Sea $f : R^3 \to R^3$ un endomorfismo definido por:

$$f(x, y, z) = (-2x + 4y + 5z, -3x + 5y + 5z, \quad z)$$

Veamos si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, determinemos una base propia y la matriz diagonal.

La matriz asociada a f en la base canónica es

$$M[f, C] = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 5 \\ -3 & 5-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Las raíces del polinomio característico son los valores propios. Estos son: $\lambda = 1,$ de multiplicidad 2 y, $\lambda = 2,$ de multiplicidad 1.

El subespacio propio $V_{\lambda=1}$, asociado al valor propio $\lambda = 1,$ está formado por todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} -2-1 & 4 & 5 \\ -3 & 5-1 & 5 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De ahí que $V_{\lambda=1} = \left\{(x, y, z) \in R^3 : -3x + 4y + 5z = 0\right\} = \left\langle (5,5,-1), (5,0,3) \right\rangle$

El subespacio propio $V_{\lambda=2}$, asociado al valor propio $\lambda = 2,$ está formado por todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} -2-2 & 4 & 5 \\ -3 & 5-2 & 5 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De ahí que $V_{\lambda=2} = \left\{(x, y, z) \in R^3 : y = x, \ z = 0\right\} = \left\langle (1,1,0) \right\rangle$

Una base propia es $B = ((5,5,-1), (5,0,3), (1,1,0))$. La matriz asociada a f en la base B es la matriz diagonal

$$M[f, B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observación: permutando los vectores de esta base propia, obtenemos otra base propia y por consiguiente otra matriz diagonal. Otra base propia es $B' = ((5,5,-1),(1,1,0),(5,0,3))$ y la matriz asociada a f en esta base es

$$M[f,B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Determinemos los valores y vectores propios del endomorfismo de R^3 cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Es diagonalizable la matriz A ?

El polinomio característico es

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (2-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Las raíces del polinomio característico son los valores propios. Estos son: $\lambda = -1,$ de multiplicidad 2 y, $\lambda = 2,$ de multiplicidad 1.

El subespacio propio $V_{\lambda=2}$, asociado al valor propio $\lambda = 2,$ está formado por todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De ahí que $V_{\lambda=2} = \{(x,y,z) \in R^3 : y = -3x,\ z = -2x\} = \langle (1,-3,-2) \rangle$

El subespacio propio $V_{\lambda=-1}$, asociado al valor propio $\lambda = -1,$ está formado por todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De ahí que $V_{\lambda=-1} = \{(x,y,z) \in R^3 : z = x\} = \langle (1,0,1) \rangle$

La matriz A no es diagonalizable porque la multiplicidad del valor propio $\lambda=-1$ es $2\neq \dim(V_{\lambda=-1})=1$.

Ejemplo 3

Determina si la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ es diagonalizable.

El polinomio característico es
$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+5.$

Este polinomio no tiene raíces reales. La matriz A no es diagonalizable.

Ejemplo 4

El endomorfismo $f:R^3\to R^3$ se define a partir de la imagen de los vectores de la base canónica:

$f(1,0,0)=(1,0,1)$
$f(0,1,0)=(0,1,2)$
$f(0,0,1)=(0,-2,1)$

¿Es f diagonalizable?

La matiz asociada a f en la base canónica es

$$M[f,C]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

El polinomio característico es
$$P_f(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -2\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda+5\right)$$
La única raíz real del polinomio característico es $\lambda=1$ y tiene multiplicidad 1. Entonces, el endomorfismo f no es diagonalizable.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

Diagonalización usando Mathcad

Ejemplo 1

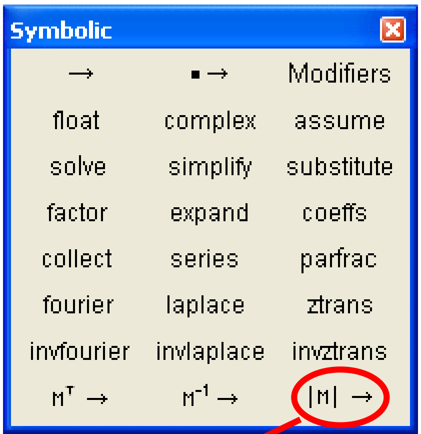
Determinemos los valores y vectores propios de la siguiente matriz

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definimos la matriz unidad:

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y luego calculamos polinomio característico usando el comando **Symbolic**:



$$|M - \lambda \cdot I| \rightarrow 4 - 9\cdot\lambda + 6\cdot\lambda^2 - \lambda^3$$

Para determinar las raíces del polinomio característico usaremos el comando **solve** de la barra de herramientas **symbolic**:

$$P := 4 - 9\cdot\lambda + 6\cdot\lambda^2 - \lambda^3$$

$$P \text{ solve}, \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces los valores propios son $\lambda = 1$, con multiplicidad 2, y $\lambda = 4$, con multiplicidad 1.

Podríamos haber calculado directamente los valores propios usando la función eigenvals:

$$v := \text{eigenvals}(M)$$

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El subespacio propio $V_{\lambda=1}$, asociado al valor propio $\lambda = 1$, está formado por todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$x + y + z = 0$$

En este caso, la solución del sistema es evidente, $z = -x - y, \quad \forall x, y \in R.$
De ahí que $V_{\lambda=1} = \{(x, y, z) \in R^3 : z = -x - y\} = \langle((1,0,-1),(0,1,-1)\rangle$

El subespacio propio $V_{\lambda=4}$, asociado al valor propio $\lambda = 4$, está formado por todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema vamos a usar la instrucción **Given** y la función **find**

En primer lugar le asignamos valores iniciales cualesquiera a las incógnitas:

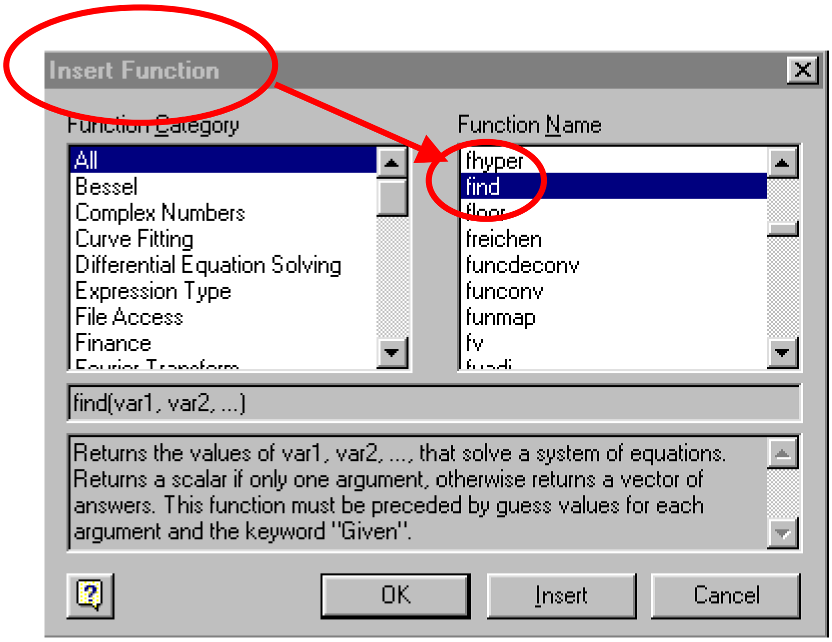
$x := 1 \quad y := 1 \quad z := 1$

Introducimos el sistema de ecuaciones después de la instrucción Given:

given

$$-2x + y + z = 0$$
$$x - 2y + z = 0$$
$$x + y - 2z = 0$$

Usamos la función find:



Obtenemos:

$$\mathrm{find}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

De ahí que $V_{\lambda=4} = \{(x, y, z) \in R^3 : x = y = z\} = \langle((1,1,1)\rangle$

Nótese que cualesquiera que sean dos vectores propios asociados a valores propios diferentes, son ortogonales (el producto escalar es cero). Esto lo sabíamos de antemano porque la matriz M es simétrica.

Si se desea obtener una base ortonormal que diagonalice M, se puede aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt y luego, normalizar los vectores dividiéndolos por su norma.

Los vectores propios se pueden calcular directamente mediante la función eigenvecs:

$V := \mathrm{eigenvecs}(M)$

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} & \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2} & \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

De antes sabemos que los valores propios se calculan mediante

$$v := \text{eigenvals}(M)$$

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios por separado hacemos:

$$V := \text{eigenvecs}(M)$$

$$V^{\langle 0 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad V^{\langle 1 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad V^{\langle 2 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto una base propia es:

$$B = \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right)$$

En este caso, la base que hemos obtenido usando la función eigenvecs de Mathcad es ortonormal.

La forma diagonal de la matriz M referida a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Veamos si la siguiente matriz es diagonalizable:

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ -6 & 8 & 16 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son

$$v := \text{eigenvals}(M)$$

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Son todos reales y diferentes. La matriz es diagonalizable.

Los vectores propios son

$$V := \text{eigenvecs}(M)$$

$$V^{\langle 0\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V^{\langle 1\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2}{5}\cdot\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\cdot\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad V^{\langle 2\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{17}\cdot\sqrt{17} \\ \frac{-2}{17}\cdot\sqrt{17} \\ \frac{2}{17}\cdot\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

La siguiente matriz no es diagonalizable en R :

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios no son reales

$$v := \text{eigenvals}(M)$$

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4

La siguiente matriz no es diagonalizable

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son

$$v := \text{eigenvals}(M)$$

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ tiene dimensión 1 y la multiplicidad de este valor propio es 2. En efecto, los vectores propios son:

$$V \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-2}{5}\cdot\sqrt{5} & \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{5}\cdot\sqrt{5} & \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Montes Lozano, A (1998): "Álgebra", Módulo 3: "Matrices, vectores y sistemas de ecuaciones lineales" Ediciones UOC

[2] Montes Lozano, A (1998): "Álgebra", Módulo 4: "Aplicaciones Lineales" Ediciones UOC

[3] G. J. Porter, D. R. Hill (1996): “Interactive Linear Algebra. A laboratory course using MathCAD”, Springer-Verlag New York

[4] H. Benker (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York

[5] H. Anton (2000): "Elementary Linear Algebra: Applications Version", John Wiley&Sons

[6] J. Rojo (1986): "Álgebra Lineal", 2ª Edición. Editorial AC

ENLACES

[W1] http://www.planetmath.org/encyclopedia/LinearAlgebra.html

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre álgebra lineal. En inglés.

[W2] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Algebra.html

Página web de la School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. Trata sobre la historia del álgebra. En inglés.

[W3] http://www.math.unl.edu/~tshores/linalgtext.html

Página web del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nebraska-Lincoln. Libro on-line sobre álgebra lineal y sus aplicaciones. En inglés.

[W4] http://www.numbertheory.org/book/

Página web sobre teoría de números. Libro on-line sobre álgebra lineal. En inglés.

[W5] http://www.tu-chemnitz.de/iic/ela/

Página web de la publicación "The Electronic Journal of Linear Algebra" publicada por "The International Linear Algebra Society". En inglés.

[W6] http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/la-sw.html

Página en la que está recogida la información relacionada con el software disponible gratuitamente en la red para la solución de problemas de álgebra lineal. En inglés.

[W7] http://www.math.miami.edu/~ec/book/

Libro online sobre álgebra con especial énfasis en álgebra lineal: "Elements of Abstract and Linear Algebra" escrito por Edwin H. Connell

[W8] *http://www.math.gatech.edu/~carlen/1502S/cnotes.html*

Libro online sobre álgebra: "Beginning with Linear Álgebra " escrito por Eric Carlen and Conceicao Carvalho.

[W9] http://joshua.smcvt.edu/linalg.html

Libro online: "Linear Algebra" escrito por Jim Hefferon, Mathematics Saint Michael's College