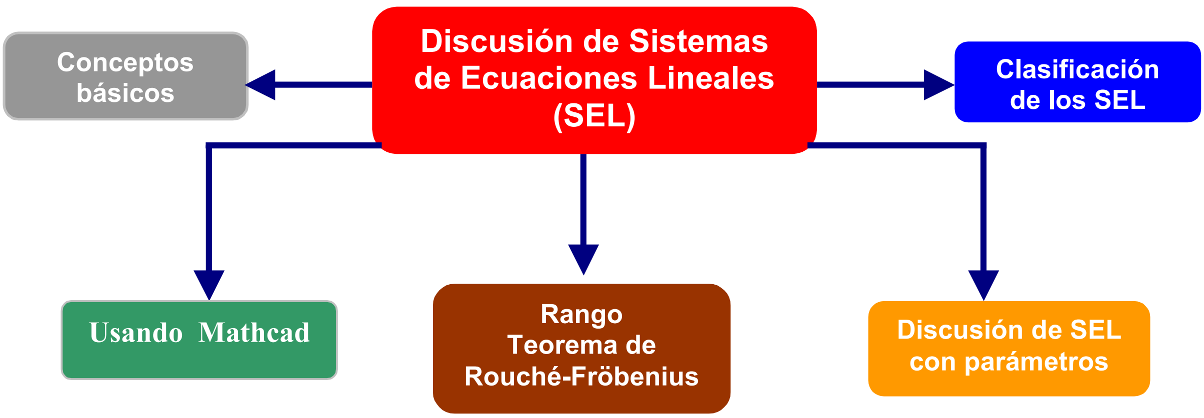
DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Autores: Juan Alberto Rodríguez Velázquez (jrodriguezvel@uoc.edu), Cristina Steegmann Pascual (csteegmann@uoc.edu)

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Comenzamos el *math-block* presentando los principales conceptos relacionados con las ecuaciones y sistemas de ecuaciones (Identidad, ecuación, sistema de ecuaciones, sistema de ecuaciones lineales, etc). Presentamos la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) de acuerdo a su solución y enunciamos el teorema de Rouchè-Fröbenius, que es la principal herramienta para la discusión de los SEL. Para poder aplicar dicho teorema necesitamos saber calcular el rango de matrices, es por eso que una de las secciones del *math-block* se dedica al estudio del rango. Presentamos varios ejemplos que ilustran los pasos a seguir para discutir los SEL con parámetros. Y por último discutimos algunos SEL con ayuda del programa Mathcad.

A parte de este *math-block*, para completar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales recomendamos los *math-blocks* titulados "Sistemas de Ecuaciones Lineales: Resolución" y "Modelos matemáticos".

OBJETIVOS

- Conocer la clasificación de los SEL de acuerdo a su solución.
- Conocer el concepto de rango de una matriz y los métodos de cálculo.
- Conocer y aplicar el teorema de Rouchè-Fröbenius.
- Discutir SEL con parámetros.
- Mostrar las posibilidades que brinda el programa Mathcad para discutir los SEL.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable haber leído, previamente, los *math-blocks* relativos a:

- Álgebra de matrices.
- Determinantes.
- Matriz inversa.
- Además, recomendamos los introductorios a Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones: Conceptos básicos

Una de las relaciones más usadas en matemáticas es la relación de igualdad "=", esta juega un papel fundamental en el estudio de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Iniciaremos nuestro estudio presentando algunos tipos de expresiones en las que intervienen igualdades. La siguiente expresión indica la igualdad entre dos cantidades numéricas

$$(4\cdot 7-3)^2=625.$$

Diremos que esta es una *igualdad numérica*, mientras las siguientes expresiones, que indican la igualdad entre expresiones algebraicas (aparecen variables),

$$3(x+y)=3x+3y$$

$$x^2-3x=2x-6,$$

son denominadas *igualdades literales*. La primera igualdad literal es una *identidad* ya que se verifica para cualquier valor numérico de las variables que en ella aparecen. En cambio, la segunda igualdad literal es una *ecuación* ya que sólo se verifica para algunos valores numéricos de la variable que en ella aparecen. Estos valores son $x=2$ y $x=3$.

Las *soluciones* de una ecuación son los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad. Y *resolver* una ecuación significa determinar todas las soluciones si es que existen. Veamos algunos ejemplos:

1. La ecuación lineal $4x-8=7x-3$ tiene solución $x=-\frac{5}{3}$. Esto se verifica sustituyendo:

$$4\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-8=7\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-3$$

$$\frac{44}{3}=\frac{44}{3}.$$

2. La ecuación exponencial $3^{2x}-3^x=3^x-1$ tiene solución x=0. Al sustituir tenemos:

$$3^0-3^0=3^0-1$$

$$1-1=1-1$$

$$0=0.$$

3. La ecuación diferencial $y''+y'=0$ tiene solución $y = c_1 + c_2 e^{-x}$, donde $c_1, c_2 \in R$. Para comprobarlo calculamos las derivadas y sustituimos: $y' = -c_2 e^{-x}$, $y'' = c_2 e^{-x}$; al sustituir se obtiene $c_2 e^{-x} - c_2 e^{-x} = 0$.
4. La ecuación lineal $4x - 5y + 2z = 3$ tiene infinitas soluciones, algunas de ellas son las siguientes:

x	y	z
0	1	4
1	1	2
1/2	1	3

En muchas ocasiones los problemas estudiados conducen a varias ecuaciones que relacionan las mismas incógnitas. En esos casos estamos en presencia de un *sistema de ecuaciones*. Las *soluciones* de un sistema de ecuaciones son los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad en cada una de las ecuaciones del sistema**.** *Discutir* un sistema de ecuaciones significa determinar si tiene soluciones y cuáles son. Veamos algunos ejemplos de sistemas de ecuaciones:

1. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{gathered} x + y + z = 2000 \\ y + z = 1500 \\ x + y + \frac{3}{4}z = 1800 \end{gathered}$$

tiene solución $x = 500$, $y = 700$ y $z = 800$.

2. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{gathered} x + y + z = 2000 \\ y + z = 1500 \\ 4x + 4y + 3z = 7200 \end{gathered}$$

tiene la misma solución del anterior.

3. El sistema de ecuaciones polinómicas

$$\begin{gathered} y = 5(x-1) \\ y = x^3 - x^2 \end{gathered}$$

tiene soluciones $x = 1$, $x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$.

4. El sistema de ecuaciones exponenciales con dos incógnitas

$$\begin{gathered} 2^{x+y} = 1 \\ 2^x - 2^{y+2} = 0 \end{gathered}$$

tiene solución $x = 1$ e $y = -1$.

En todos los ejemplos anteriores la comprobación de la solución se obtiene de manera inmediata por sustitución. Nótese que los dos primeros sistemas de ecuaciones tienen la misma solución, en ese caso se dice que los sistemas son *equivalentes*.

Como hemos podido observar en los ejemplos anteriores, es fácil comprobar si determinados valores de las incógnitas son solución de una determinada ecuación o sistema de ecuaciones.

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

En cambio, en muchas ocasiones no es fácil determinar si una ecuación (o sistema de ecuaciones) tiene solución, y en caso de tener, no siempre es fácil determinar con toda precisión todas las soluciones. Es por eso que desde la antigüedad los matemáticos han dedicado mucho tiempo y esfuerzo a determinar fórmulas, métodos y algoritmos que permitan determinar la solución de cada tipo de ecuación o sistemas de ecuaciones con que se han ido tropezando a lo largo del desarrollo de nuestra civilización. En muchos casos el esfuerzo dedicado no ha sido en vano, pero desafortunadamente en algunas ocasiones tenemos que conformarnos con valores aproximados de la solución después de haber realizado tediosos cálculos manuales o con ayuda del ordenador.

En los ejemplos anteriores hemos presentado varios tipos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones con el objetivo de ilustrar los conceptos de ecuación, sistema de ecuaciones, solución de una ecuación y solución de un sistema, pero a lo largo de este *math-block* nos limitaremos al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) que, por fortuna, son muy fáciles de discutir; en todos los casos podremos determinar si los SEL tiene soluciones y cuáles son.

Sistemas de ecuaciones lineales: Forma matricial

Un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

es denominado *sistema de ecuaciones lineales* (SEL) de orden $m \times n$. Los SEL se pueden representar en forma de producto de matrices como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} son los coeficientes, x_{ij} las incógnitas, y b_{ij} son los términos independientes. Este producto suele escribirse en forma simplificada como $A \cdot X = B$. La matriz $A = (a_{ij})$ recibe el nombre de *matriz del sistema* o *matriz de los coeficientes*. Otra forma clara de expresar los SEL es a través de su *matriz ampliada* $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente SEL:

$$x-3y+6z-8t=5$$
$$y+z=15$$
$$x+y-3z+t=8$$

Su representación en forma de producto de matrices es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Como veremos más adelante, el estudio del rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada nos permitirá determinar el número de soluciones de los SEL. Es por eso que la siguiente sección está dedicada al estudio del rango de una matriz.

Rango de una matriz

Dada una matriz de orden $n \times m,$ consideremos k filas y k columnas. Los elementos comunes a estas filas y columnas consideradas forman una matriz cuadrada cuyo determinante es denominado *un menor* de orden k de la matriz dada.

Ejemplo: Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -4 & 6 & -8 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Un menor de orden 2 de la matriz A se obtiene al seleccionar dos filas y dos columnas. Por ejemplo, si seleccionamos las dos últimas filas y las dos últimas columnas obtenemos el siguiente menor:

$$M=\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Otro menor de orden 2 es, por ejemplo, el que se obtiene de seleccionar las dos últimas filas y las columnas primera y tercera:

$$N = \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Dado un menor, M, de orden k, se denomina *menor orlado al menor* M a un menor de orden $k+1$ formado por las filas que determinan a M y una cualquiera de las restantes, y las columnas que determinan a M y una cualquiera de las restantes.

Ejemplo: Consideremos la matriz A y el menor M del ejemplo anterior. Entonces los menores orlados a M son:

El menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -4 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, que se obtiene al agregar la primera fila y la primera columna, y el menor $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, que se obtiene al agregar la primera fila y la segunda columna.

> El *rango* de una matriz A, no nula, es un número r que cumple las siguientes condiciones:
> 1. Existe un menor de A, de orden r, distinto de cero.
> 2. Todos los menores de A de orden $r+1$ (en caso de que existan) son nulos.

El rango de una matriz A se denota por $rg(A)$.

Ahora podemos decir que el rango de la matriz A del ejemplo anterior es 2, $rg(A) = 2,$ ya que el menor $\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ es diferente de cero y todos sus menores orlados son nulos. Esto es,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -4 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 6 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Recomendamos tener en cuanta los siguientes pasos al calcular el rango de una matriz:

1. Se suprimen todas las filas o columnas que estén formadas sólo por ceros.

2. Se observa, por simple inspección, si se aprecian filas o columnas que sean combinación lineal de sus paralelas y se procede a eliminarlas.

3. Se elige un elemento no nulo de la matriz, con lo que aseguramos que el rango es mayor o igual a uno, al existir un menor no nulo de orden 1. A continuación se orla este menor, es decir, formamos un menor de orden 2 que contenga al número seleccionado. Si alguno de los menores así formados es no nulo, el rango de la matriz es al menos dos.

4. Repetimos este proceso de ir orlando el menor que ha resultado diferente de cero en el paso anterior, hasta obtener un menor, de orden $k \neq 0,$ que al orlarlo con las restantes filas y columnas de la matriz, para formar menores de orden $k+1,$ resulten todos ellos determinantes nulos. Entonces podemos concluir que el rango de la matriz es k.

Como ejemplo vamos a calcular el rango de la siguiente matriz:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al observar las filas vemos que la tercera es múltiplo de la primera. Eliminamos la tercera fila y obtenemos la siguiente matriz:

$$M'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(M')$. Seleccionamos el elemento de la primera fila y primera columna de M' que es diferente de cero. Así tenemos un menor no nulo de orden 1. Con esto sabemos que $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(M')\geq 1$. Ahora orlamos este menor a partir de la segunda fila y la segunda columna y obtenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-3=-3\neq 0.$$

Ahora tenemos que $\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}(M')\geq 2$. Si orlamos este menor a partir de la tercera fila y la tercera columna, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+6+0)-(0+0+6)=0.$$

Y como este menor es nulo buscamos otro, el que se obtiene considerando la tercera fila y la última columna. Así obtenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (0+6+6)-(0+3+6)=3\neq 0.$$

No podemos seguir orlando este menor de orden 3 que es diferente de cero porque M' sólo tiene 3 filas. Entonces concluimos que $\mathrm{rg}(M)=3$.

Un detalle a tener en cuenta al calcular el rango de la matriz de un sistema de ecuaciones lineales y el de su matriz ampliada es que se cumple la siguiente relación: $rg(A)\leq rg(A|B)$.

El rango de una matriz también se puede estudiar a partir del concepto de dependencia lineal de vectores o, de forma equivalente, del método de Gauss para escalonar matrices. Remitimos a los interesados a las páginas 35 y 36 de [1].

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a su solución. Teorema de Rouchè-Fröbenius

Los SEL se clasifican de acuerdo a su solución en compatibles e incompatibles. Un SEL es *compatible* cuando tiene solución, en caso contrario se dice que es *incompatible*. A su vez, los SEL compatibles se clasifican en determinados e indeterminados: un sistema compatible es *determinado* si tiene solución única, en caso contrario es *indeterminado*.

Teorema de Rouchè-Fröbenius

Sea $AX = B$ un SEL de n incógnitas. Entonces se cumple:

- $rg(A) = rg(A|B)$ =n $\leftrightarrow$ el SEL es compatible determinado;
- $rg(A) = rg(A|B)$ <n $\leftrightarrow$ el SEL es compatible indeterminado con $n - rg(A)$ grados de libertad;
- $rg(A) < rg(A|B)$ $\leftrightarrow$ el SEL es incompatible,

Ejemplo 1

Consideremos el siguiente SEL:

$$\begin{gathered} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 0 \\ 2x - 3y = 2 \end{gathered}$$

Para discutir el sistema, primero determinamos la matriz del sistema y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ es diferente de cero y no es posible orlarlo, se obtiene $rg(A) = 2$.

En la matriz ampliada sí es posible orlar este menor:

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (6 + 0 - 3) - (2 + 4 + 0) = -3 \neq 0.$ Entonces se obtiene que $rg(A|B) = 3.$

De ahí que $rg(A) < rg(A|B)$ y podemos concluir que el sistema es incompatible.

Ejemplo 2

A continuación vamos a discutir el siguiente SEL:

$$\begin{gathered} 2x + y = 4 \\ x + z = 4 \\ 3x + y + z = 8 \end{gathered}$$

Determinemos la matriz del sistema y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&1\\3&1&1\end{pmatrix}\qquad (\mathrm{A}|\mathrm{B})=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&4\\1&0&1&4\\3&1&1&8\end{array}\right)$$

$rg(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$ y $|\mathrm{A}|=0.$ Para ver que $rg(A|B)=2$ es suficiente con darse cuenta que la última fila es la suma de las dos primeras. Así, $rg(A)=rg(A|B)=2$ el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es $n=3,$ $n=3>2=rg(A)=rg(A|B),$ el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad.

En este caso es fácil determinar todas las soluciones del sistema ya que, como hemos dicho antes, la última ecuación es la suma de las dos primeras. Por eso suprimiendo la última ecuación obtenemos el siguiente SEL

$$2x+y=4$$
$$x+z=4$$

que es equivalente al anterior. La solución se obtiene expresando todas las variables en función de una de ellas (un grado de libertad). Si expresamos todas las incógnitas en función de z obtenemos

$$\begin{cases}x=4-z\\y=4-2(4-z)=-4+2z\\z=z\end{cases}\quad \text{o lo que es igual}\quad \begin{cases}x=4-t\\y=-4+2t\\z=t\end{cases}\qquad t\in R.$$

Ejemplo 3

Consideremos el siguiente SEL:

$$3x-y=2$$
$$2x+y+z=0$$
$$3y+2z=-1$$

Para discutir el sistema de ecuaciones, vamos a determinar la matriz del sistema y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\2&1&1\\0&3&2\end{pmatrix}\qquad (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&0&2\\2&1&1&0\\0&3&2&-1\end{array}\right)$$

Como $|\mathrm{A}|=(6+0+0)-(0-4+9)=1\neq 0,$ tenemos que $rg(A)=3.$ De ahí que $rg(A)=rg(A|B)=n=3,$ por lo que el sistema es compatible determinado.

En este caso, como la matriz del sistema es cuadrada y su determinante es diferente de cero, podemos calcular su matriz inversa y resolver el sistema de ecuaciones de la siguiente forma: Calculamos A^{-1} manualmente o usando mathcad mediante el comando **X^{-1}** de la barra de herramientas **Matrix** (ver el *math-block* sobre matriz inversa para profundizar en los métodos de cálculo). En cualquier caso obtenemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ 6 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

Expresamos el SEL en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 6 & -3 \\ 6 & -9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución del sistema es $x = -1,\ \ y = -5$ y $z = 7$.

En este *math-block* no perseguimos como objetivo estudiar en detalle todos los métodos para resolver los SEL. Un estudio detallado de dichos métodos aparece el *math-block* titulado “Sistemas de Ecuaciones Lineales: Resolución”.

❑ Sistemas homogéneos

Diremos que un SEL es *homogéneo* si todos sus términos independientes son cero. Un SEL homogéneo es de la forma:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

Matricialmente se expresa así:

$$AX=0$$

En consecuencia la matriz ampliada tendrá la última columna de ceros, de forma que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|0)$. De ahí que, según el teorema de Rouchè-Fröbenius, podemos afirmar que los sistemas homogéneos siempre son compatibles. De todas formas, para llegar a esta conclusión no necesitábamos usar este teorema ya que, como la suma de ceros es cero, los sistemas homogéneos siempre admiten la solución trivial

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Entonces para clasificar los SEL homogéneos de acuerdo a su solución sólo tenemos que averiguar si $\mathrm{rg}(A) = n.$ En caso afirmativo el sistema es compatible determinado por lo que la única solución del sistema es la trivial. En caso contrario, cuando $\mathrm{rg}(A) < n,$ el sistema es compatible indeterminado.

Como ejemplo consideremos el siguiente SEL homogéneo:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x-y+z&=0\\ -x+2y+z&=0 \end{aligned}$$

La matriz del sistema es

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $|A|=(-1-1+2)-(1+2+1)=-4\neq 0.$ Entonces $\mathrm{rg}(A)=3.$ El sistema es compatible determinado; sólo admite la solución trivial.

Discusión de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros

En esta sección presentamos algunos ejemplos de discusión de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros. En todos ellos aplicaremos el teorema de Rouchè-Fröbenius.

Ejemplo 1

Clasifiquemos el siguiente sistema de ecuaciones de acuerdo a su solución ($k\in R$)

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ ky+kz=2\\ kx+ky+z=1 \end{cases}$$

En primer lugar vamos determinar la matriz del sistema y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & k & k\\ k & k & 1 \end{pmatrix} \qquad (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & k & k & 2\\ k & k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Estamos estudiando un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, por eso el rango de la matriz del sistema es menor o igual que 3. Para que este sistema sea compatible determinado se tiene que cumplir que el determinante de la matriz del sistema sea diferente de cero. Veamos para qué valores del parámetro k el determinante es cero. El determinante de A es:

$$|A|=(k+k^2+0)-(k^2+k^2+0)=k-k^2=k(1-k).$$

Así, $|A|=0 \Leftrightarrow k=0$ o $k=1.$ Entonces podemos concluir que para todos los valores del parámetro k diferentes de 0 y de 1 se cumple que $|A|\neq 0$ y, por consiguiente, $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A|B)=n=3.$ Es decir, el sistema será compatible determinado para todos los valores reales del parámetro k excepto para $k=0$ y $k=1.$

Ahora vamos a clasificar el sistema para los casos $k=0$ y $k=1$:

Caso $k=0$:

Las matrices son

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ y } (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&2\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

Ya sabemos que $\mathrm{rg}(A)<3$ porque $|A|=0.$ Veamos si $\mathrm{rg}(A|B)=3.$ Para eso vamos a elegir menores de orden 3 para ver si alguno es diferente de cero. En efecto, el menor formado por las tres últimas columnas es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&2\\0&1&1\end{vmatrix}=(0+0+0)-(0+0+2)=-2\neq 0.$$

De ahí que $\mathrm{rg}(A|B)=3>\mathrm{rg}(A)$ y concluimos que para $k=0$ el sistema es incompatible.

Caso $k=1$:

En este caso tenemos

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \text{ y } (A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&1&2\\1&1&1&1\end{array}\right)$$

Ya sabemos que $\mathrm{rg}(A)<3$ porque $|A|=0.$ Si encontramos un menor no nulo de A de orden 2 podremos decir que $\mathrm{rg}(A)=2.$ Elegimos el menor que resulta de seleccionar las dos primeras filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1-0=1\neq 0.$$

Entonces concluimos que $\mathrm{rg}(A)=2.$ Necesitamos calcular el rango de la matriz ampliada. Ya sabemos que $2=\mathrm{rg}(A)\leq \mathrm{rg}(A|B)$ por eso pasaremos directamente a calcular los menores, de orden 3, de la matriz ampliada. Estos son:

$$|A|=0,\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0 \text{ y } \begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0$$

Entonces $\mathrm{rg}(A|B)=2=\mathrm{rg}(A).$ Ahora podemos concluir que para $k=1$ el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad ($n-\mathrm{rg}(A)=3-2=1$).

Ejemplo 2

Clasifiquemos el siguiente sistema de ecuaciones de acuerdo a su solución ($k\in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases}kx+y+z=k\\x+ky+z=k\\x+y+kz=k\end{cases}$$

En primer lugar vamos determinar la matriz del sistema y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right)$$

Estamos estudiando un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, por eso el rango de la matriz del sistema es menor o igual que 3. Para que este sistema sea compatible determinado se tiene que cumplir que el determinante de la matriz del sistema sea diferente de cero. Veamos para qué valores del parámetro k el determinante es cero. El determinante de A es:

$$|A| = (k^3 + 1 + 1) - (k + k + k) = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2 (k+2).$$

Así, $|A| = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ o } k = -2.$ Entonces podemos concluir que para todos los valores del parámetro k diferentes de 1 y de -2 se cumple que $|A| \neq 0$ y, por consiguiente, $rg(A) = rg(A|B) = n = 3.$ Es decir, el sistema será compatible determinado para todos los valores reales del parámetro k excepto para $k = -2$ y $k = 1.$

Ahora vamos a clasificar el sistema para los casos $k = -2$ y $k = 1$:

Caso $k = -2$:

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Ya sabemos que en este caso $rg(A) < 3$ porque $|A| = 0.$ Veamos si $rg(A|B) = 3.$ Para eso vamos a elegir menores de orden 3 para ver si alguno es diferente de cero. En efecto, el menor formado por las tres últimas columnas es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 8 - 2) - (-2 + 4 + 4) = -18 \neq 0.$$

De ahí que $rg(A|B) = 3 > rg(A)$ y concluimos que para $k = -2$ el sistema es incompatible.

Caso $k = 1$:

En este caso tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El rango de estas matrices no es cero porque tienen elementos (menores de orden 1) diferentes de cero. Además, como en ambas matrices las tres filas son iguales obtenemos que $rg(A) = rg(A|B) = 1.$ Ahora podemos concluir que para $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad ($n - rg(A) = 3 - 1 = 2$).

Ejemplo 3 [5]

Hallar los valores de a y b para que el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 5y - 8z &= 0 \\ ax + by + 3z &= 0 \\ ax + y + bz &= 0 \end{aligned}$$

admita soluciones distintas de la trivial (x=y=z=0).

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & b & 3 \\ a & 1 & b \end{pmatrix}$$

El sistema es homogéneo por eso siempre admite la solución trivial. Como buscamos soluciones distintas de la trivial, necesitamos determinar los valores de a y b tales que $\mathrm{rg}(A) < 3$. En otras palabras, necesitamos determinar los valores de a y b tales que todos los menores de orden 3 sean cero. Los menores de orden tres son:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & b & 3 \end{vmatrix} = (15 - 6b - 16a) - (-15a + 12 - 8b) = -a + 2b + 3 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & 1 & b \end{vmatrix} = (5b - 6 - 16a) - (-15a + 4b - 8) = -a + b + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \left.\begin{array}{r} -a + 2b = -3 \\ -a + b = -2 \end{array}\right\} \\ \hline b = -1 \Rightarrow a = 1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 \\ a & b & 3 \\ a & 1 & b \end{vmatrix} = (2b^2 + 15a - 8a) - (-8ab + 6 + 5ab) = 2b^2 + 7a + 3ab - 6 = 0$$

Sustituyendo comprobamos que $b = -1$ y $a = 1$ son solución de la ecuación anterior.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ a & b & 3 \\ a & 1 & b \end{vmatrix} = (b^2 + 6a - 3a) - (-3ab + 2ab + 3) = b^2 + 3a + 3ab - 3 = 0$$

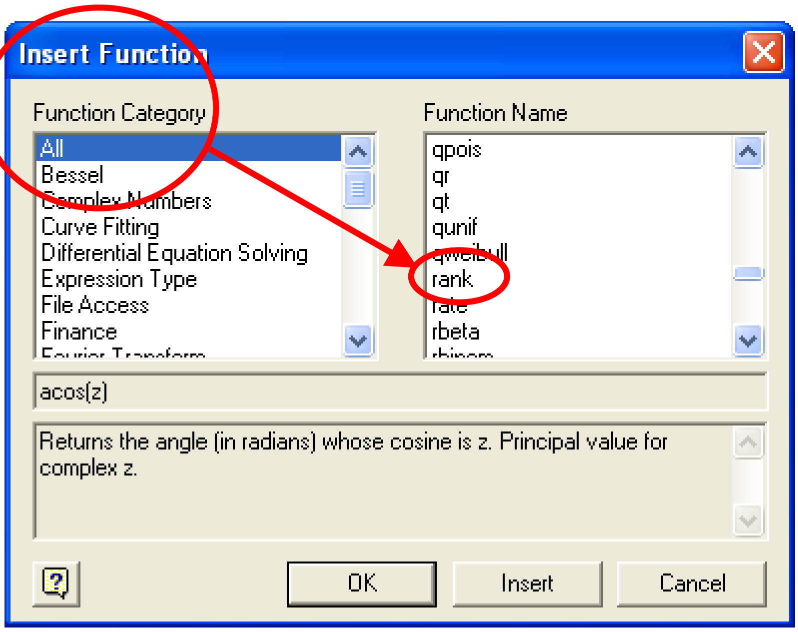
Sustituyendo comprobamos que $b = -1$ y $a = 1$ son solución de la ecuación anterior.

Así pues, concluimos que las soluciones no triviales del SEL inicial se obtienen para los valores $b = -1$ y $a = 1$.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

❑ Usando Mathcad

Utilizando la función **rank** del programa Mathcad podemos calcular el rango de una matriz.



Para ello introducimos la matriz estudiada y le aplicamos la función **rank**.

Ejemplo:

Introducimos la siguiente matriz:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su rango:

$$\mathrm{rank}(A) = 3$$

Como ejemplo de discusión de SEL con ayuda de Mathcad vamos a retomar uno de los SEL con parámetros estudiados anteriormente.

Ejemplo:

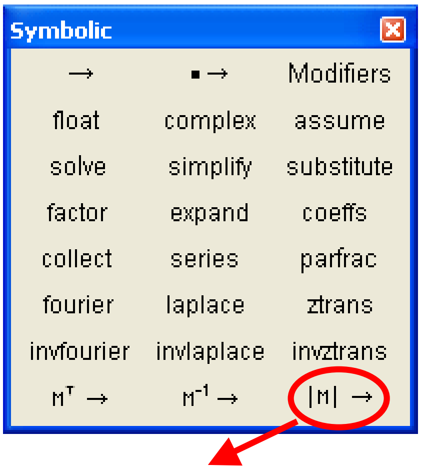
Clasifiquemos el siguiente sistema de ecuaciones de acuerdo a su solución ($k \in R$)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ky + kz = 2 \\ kx + ky + z = 1 \end{cases}$$

En primer lugar vamos introducir la matriz del sistema:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos su determinante con ayuda del comando **Symbolic**:



$$|A| \rightarrow k - k^2$$

Igualamos a cero y resolvemos: $k(1-k)=0$. Así, $|A|=0 \Leftrightarrow k=0$ o $k=1$. Entonces podemos concluir que para todos los valores del parámetro k diferentes de 0 y de 1 se cumple que $|A| \neq 0$ y, por consiguiente, $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(A|B)=n=3$. Es decir, el sistema será compatible determinado para todos los valores reales del parámetro k excepto para $k=0$ y $k=1$.

Ahora vamos a clasificar el sistema para los casos $k=0$ y $k=1$.

Caso k=0:

La matriz del sistema tiene rango 2

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A) = 2$$

Mientras que la matriz ampliada, que para el cálculo con mathcad la denotaremos por AB, tiene rango 3

$$AB := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(AB) = 3$$

De ahí que $\mathrm{rg}(A|B)=3>2=\mathrm{rg}(A)$ y concluimos que para $k=0$ el sistema es incompatible.

Caso $k=1$:

Ambas matrices tienen rango 2, esto es,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{rank}(A) = 2$$

$$AB := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{rank}(AB) = 2$$

Entonces $\text{rg}(A|B) = 2 = \text{rg}(A)$ y podemos concluir que para $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad ($n - \text{rg}(A) = 3 - 2 = 1$).

BIBLIOGRAFÍA

[1] Montes Lozano, A (1998): "Álgebra", Módulo 3: "Matrices, vectores y sistemas de ecuaciones lineales" Ediciones UOC

[2] G. J. Porter, D. R. Hill (1996): "Interactive Linear Algebra. A laboratory course using Mathcad", Springer-Verlag New York

[3] H. Benker (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York

[4] H. Anton, C. Rorres (2000): "Elementary Linear Algebra: Applications Version", John Wiley&Sons

[5] A. Negro, J. M. Poncela (1987): "Matemáticas", Alhambra

ENLACES

[W1] http://www.planetmath.org/encyclopedia/LinearAlgebra.html

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre álgebra lineal. En inglés.

[W2] http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

Página web de la "Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES" donde se explica, con gran cantidad de ejemplos aclaratorios, diferentes conceptos todos ellos relacionados con las matrices y otros temas de álgebra lineal. En español.

[W3] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/matrices/default.htm

El sitio de los estudiantes y docentes universitarios. Recopilación de apuntes, con ejemplos, sobre matrices. En español.

[W4] http://rinconprog.metropoliglobal.com/CursosProg/ProgGraf/MatGraf/index.php?cap=2

Página web de "El Rincón del Programador". En la sección de "Programación Gráfica" aparecen los "Fundamentos matemáticos de la Informática Gráfica" donde se explican diversos conceptos relacionados con el álgebra de matrices y otros temas de álgebra lineal. En español.

[W5] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Algebra.html

Página web de la School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland. Trata sobre la historia del álgebra. En inglés.

[W6] http://www.richland.cc.il.us/james/lecture/m116/matrices/applications.html

Página web con aplicaciones de matrices y determinantes. En inglés.

[W7] http://www.math.unl.edu/~tshores/linalgtext.html

Página web del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nebraska-Lincoln. Libro on-line sobre álgebra lineal y sus aplicaciones. En inglés.

[W8] http://www.numbertheory.org/book/

Página web sobre teoría de números. Libro on-line sobre álgebra lineal. En inglés.

[W9] http://archives.math.utk.edu/topics/linearAlgebra.html

Página web de enlaces relacionados con álgebra lineal y teoría de matrices. En inglés.

[W10] http://www.tu-chemnitz.de/iic/ela/

Página web de la publicación "The Electronic Journal of Linear Algebra" publicada por "The International Linear Algebra Society". En inglés.

[W11] http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/la-sw.html

Página en la que está recogida la información relacionada con el software disponible gratuitamente en la red para la solución de problemas de álgebra lineal. En inglés.

[W12] http://ceee.rice.edu/Books/LA/linearbook.pdf

Página web del "Center for Excellence and Equity in Education" de la Universidad de Rice. Libro sobre álgebra lineal. En inglés.