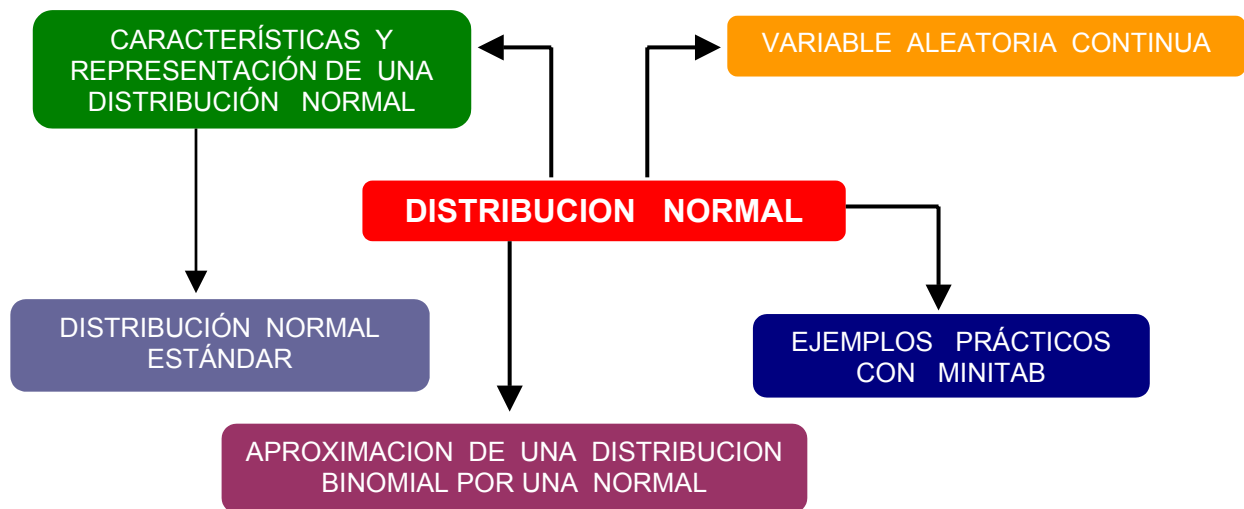


LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Autores: Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu), Máximo Sedano (msedanoh@uoc.edu), Alicia Vila (avilag@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

La distribución de probabilidad conocida como distribución normal es, por la cantidad de fenómenos que explica, la más importante de las distribuciones estadísticas.

A la distribución normal también se la denomina con el nombre de campana de Gauss, pues al representar su función de probabilidad, ésta tiene forma de campana. [1]

En el *math-block* sobre la distribución binomial se introduce el concepto de variable aleatoria, distinguiendo además dos tipos de variables, las discretas y las continuas. En este apartado seguimos con el estudio de distribuciones de probabilidad analizando la distribución de probabilidad continua más importante, la distribución normal.

A continuación veremos las características principales de una distribución de probabilidad normal, definiendo posteriormente la distribución normal estándar así como sus usos. Posteriormente, veremos cómo utilizar la distribución normal para estimar probabilidades binomiales.

OBJETIVOS

- Entender el concepto de variable aleatoria continua
- Conocer las características de la distribución de probabilidad normal
- Aprender a calcular los valores de Z
- Saber determinar la probabilidad de que una observación se encuentre entre dos puntos utilizando la distribución de probabilidad normal
- Saber determinar la probabilidad de que una observación esté por encima (o por debajo) de un cierto valor utilizando la distribución de probabilidad normal
- Aprender a comparar observaciones que se encuentran en diferentes distribuciones de probabilidad
- Ser capaz de utilizar la distribución normal para aproximar la distribución de probabilidad binomial

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Sería conveniente revisar el *math-block* “La distribución binomial” para tener asimilados los conceptos relacionados con las distribuciones de probabilidad y las definiciones de variables aleatorias continuas, así como entender el uso del Minitab en los distintos ejemplos que aparecen.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

□ Definición de variable aleatoria continua

Una **variable aleatoria continua** es aquella que puede asumir un número infinito de valores dentro de un determinado rango.

Por ejemplo, el peso de una persona podría ser 80.5, 80.52, 80.525,... dependiendo de la precisión de la báscula.

□ Definición de distribución de probabilidad normal:

La Normal es la distribución de probabilidad más importante. Multitud de variables aleatorias continuas siguen una distribución normal o aproximadamente normal.

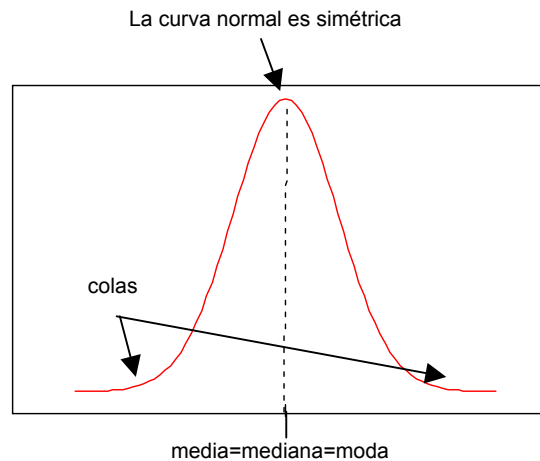
Una de sus características más importantes es que casi cualquier distribución de probabilidad, tanto discreta como continua, se puede aproximar por una normal bajo ciertas condiciones.

La distribución de probabilidad normal y la curva normal que la representa, tienen las siguientes características:

- La curva normal tiene forma de campana y un solo pico en el centro de la distribución. De esta manera, la media aritmética, la mediana y la moda de la

distribución son iguales y se localizan en el pico. Así, la mitad del área bajo la curva se encuentra a la derecha de este punto central y la otra mitad está a la izquierda de dicho punto.

- La distribución de probabilidad normal es simétrica alrededor de su media.
- La curva normal desciende suavemente en ambas direcciones a partir del valor central. Es asintótica, lo que quiere decir que la curva se acerca cada vez más al eje X pero jamás llega a tocarlo. Es decir, las “colas” de la curva se extienden de manera indefinida en ambas direcciones.

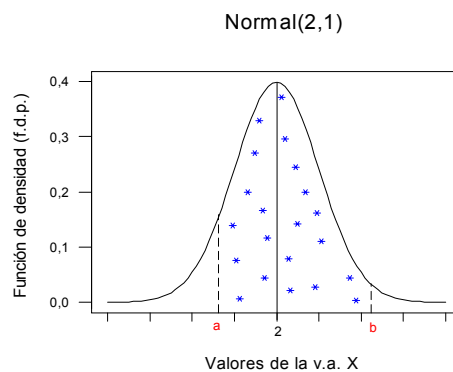


Para indicar que una variable aleatoria (v.a.) sigue una distribución normal de media μ y desviación estándar σ usaremos la expresión: $X \sim N(\mu, \sigma)$.

□ **Definición de función de densidad de probabilidad:**

La probabilidad de que una variable aleatoria (v.a.) X tome un valor determinado entre dos números reales a y b coincide con el área encerrada por la función $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ (**función de densidad de probabilidad**) entre los puntos a y b , es decir :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx :$$

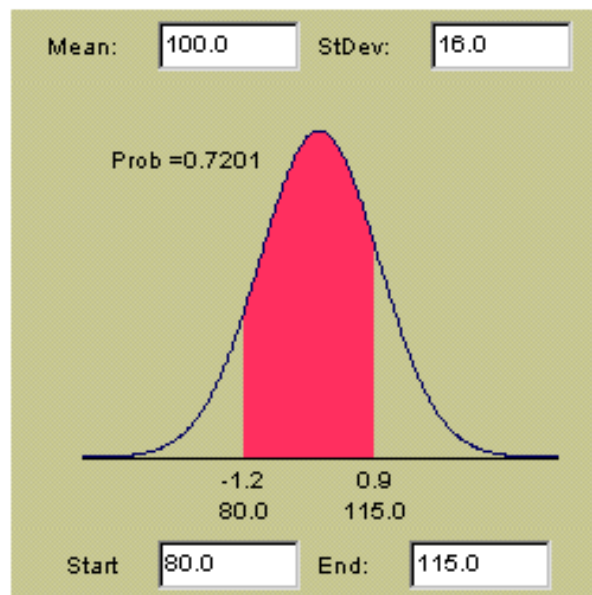


Como hemos comentado anteriormente, observar que:

- La distribución normal es simétrica respecto de su media μ .
- El área total encerrada por $f(x)$ vale 1, i.e.: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < +\infty) = 1$.
- Al ser X v.a. continua, $P(X=a) = \int_a^a f(x)dx = 0$, $\forall a \in R \Rightarrow P(X \leq a) = P(X < a)$.

Veamos, a través de una sencilla aplicación, este concepto de cómo la distribución normal representa un área bajo la curva. Para ello, podemos consultar el siguiente enlace: <http://psych.colorado.edu/~mcclella/java/normal/accurateNormal.html>, donde veremos, cambiando (1) los valores de la media y la desviación estándar, y (2) los valores entre los cuales queremos calcular la probabilidad, a qué porción de espacio bajo la curva normal corresponde la probabilidad buscada.

Probabilities for the Normal Distribution



□ La distribución normal estándar:

Se observó que no existe una sola distribución de probabilidad normal, sino una “familia” de ellas. Como sabemos, cada una de las distribuciones puede tener una media (μ) o una desviación estándar distinta (σ). Por tanto, el número de distribuciones normales es ilimitado y sería imposible proporcionar una tabla de probabilidades para cada combinación de μ y σ .

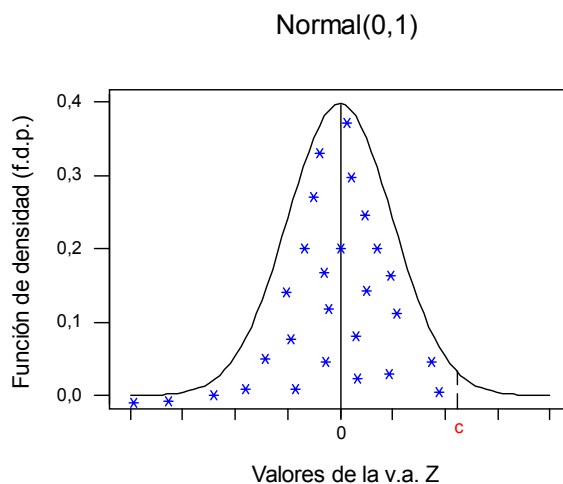
Para resolver este problema, se utiliza un solo “miembro” de la familia de distribuciones normales, aquella cuya media es 0 y desviación estándar 1 que es la que se conoce como **distribución estándar normal**, de forma que todas las distribuciones normales pueden convertirse a la estándar, restando la media de cada observación y dividiendo por la desviación estándar.

Primero, convertiremos la distribución real en una distribución normal estándar utilizando un valor llamado Z , o **estadístico Z** que será la distancia entre un valor seleccionado, designado X , y la media μ , dividida por la desviación estándar σ .

Formalmente, si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces la v.a. $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ se distribuye según una normal de media 0 y desviación estándar 1, i.e.: $Z \sim N(0,1)$, que es la distribución llamada **normal estándar o tipificada**.

De esta manera, un valor Z mide la distancia entre un valor especificado de X y la media aritmética, en las unidades de la desviación estándar. Al determinar el valor Z utilizando la expresión anterior, es posible encontrar el área de probabilidad bajo cualquier curva normal haciendo referencia a la distribución normal estándar en las tablas correspondientes.

Así pues, para averiguar el área anterior utilizaremos la tabla que encontraremos al final de este apartado. Dicha tabla nos proporciona la probabilidad de que la v.a. normal estándar Z tome un valor situado a la izquierda de un número c, i.e.: $P(Z < c)$. En otras palabras, esta tabla nos da el valor del área encerrada por $f(x)$ entre $-\infty$ y c.



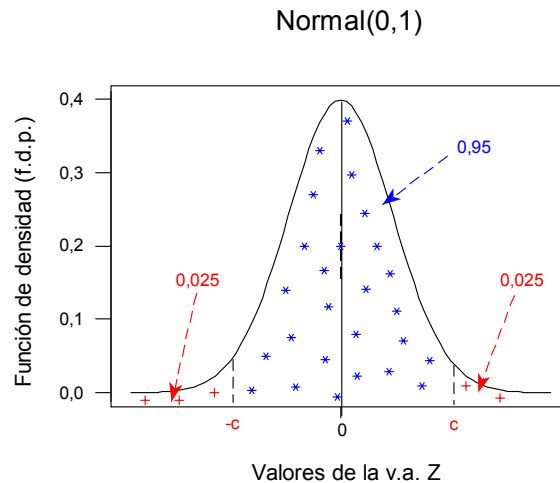
Ejemplos:

- a) $P(Z < 1,52) = \{\text{ver tabla}\} = 0,9357$
- b) $P(Z > 1,52) = \{\text{área total} = 1\} = 1 - P(Z < 1,52) = 0,0643$
- c) $P(0 < Z < 1,52) = P(Z < 1,52) - P(Z < 0) = \{\text{simetría}\} = 0,9357 - 0,5000 = 0,4357$
- d) $P(-2,1 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -2,1) = \{\text{sim+tabla}\} = 0,5000 - 0,0179 = 0,4821$

Por otra parte, denotemos por $z(\alpha)$ aquel número real tal que $P[Z > z(\alpha)] = \alpha$

Por ejemplo:

- a) $z(0,25) = n^\circ$ que deja un área de 0,25 a su derecha = {tabla} $\approx 0,675$
ya que $P(Z < 0,67) = 0,7486$ y $P(Z < 0,68) = 0,7517$.
- b) Si queremos calcular un n° real c tal que $P(-c < Z < c) = 0,95$, nos interesa hallar $z(0,025)$ {ver gráfico inferior}. Según la tabla, $c = z(0,025) = 1,96$ ya que $P(Z < 1,96) = 0,975$ y $P(Z < -1,96) = 0,025$:



Supongamos ahora que $X \sim N(100,16)$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable X tome un valor entre 100 y 115? :

$$P(100 < X < 115) = P\left(\frac{100-100}{16} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{115-100}{16}\right) = P(0 < Z < 0,9375) \approx \\ \approx P(Z < 0,94) - P(Z < 0) = 0,8264 - 0,5000 = 0,3264$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor de 90? :

$$P(X > 90) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{90-100}{16}\right) = P(Z > -0,63) = 1 - P(Z < -0,63) = \\ = 1 - 0,2643 = 0,7357$$

□ Teorema de Chebyshev

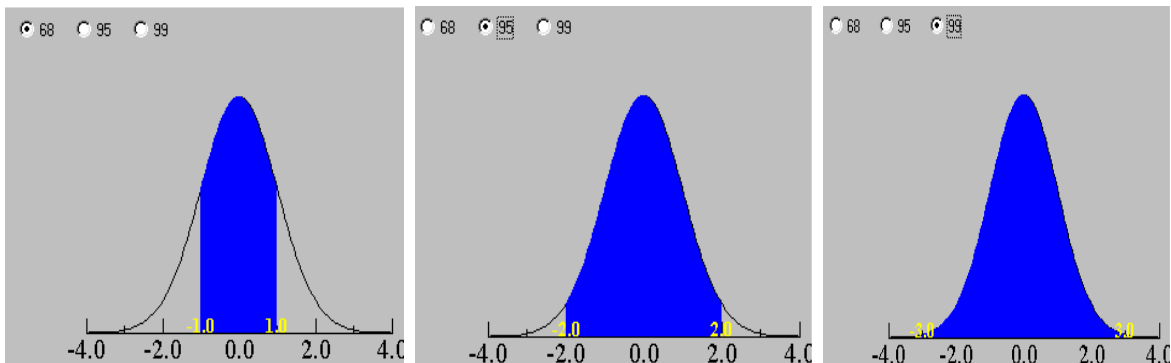
Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces:

- a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68$
- b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,95$
- c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$

i.e., el 68% (aproximadamente) de los valores que tome la v.a. X estarán situados a una distancia de la media inferior a una desviación estándar. Análogamente, el 95% de los valores estarán situados a menos de 2 veces la desviación estándar, y un 99,7% de dichos valores se encontrarán dentro un radio de 3 sigma.

Por lo tanto, para una distribución normal, la mayor parte de todos los valores yacen a tres desviaciones standard de la media..

Los applets que aparecen a continuación permiten identificar los respectivos porcentajes del área bajo la curva:



□ Aproximación de la distribución normal a la binomial:

Si $X \approx B(n, p)$ y el nº de pruebas n es “muy grande” (en la práctica es suficiente con verificar: $n \cdot p \geq 5$ y $n \cdot (1-p) \geq 5$), entonces podemos aproximar la distribución binomial anterior a una normal, en concreto: $X \approx N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}\right)$. Esta aproximación será tanto mejor cuanto mayor sea n .

Hay que tener en cuenta que, antes de aplicar la distribución normal, es necesario asegurarse de que la distribución que queremos aproximar es, efectivamente, binomial.

Para ello, hay que comprobar:

- Que un experimento sólo puede tener dos resultados posibles y mutuamente excluyentes: un “éxito” y un “fracaso”.
- La distribución es consecuencia de contar el número de éxitos de un número fijo de pruebas.
- Cada prueba es independiente.
- La probabilidad, p , permanece igual de una prueba a la siguiente.

Factor de corrección de continuidad

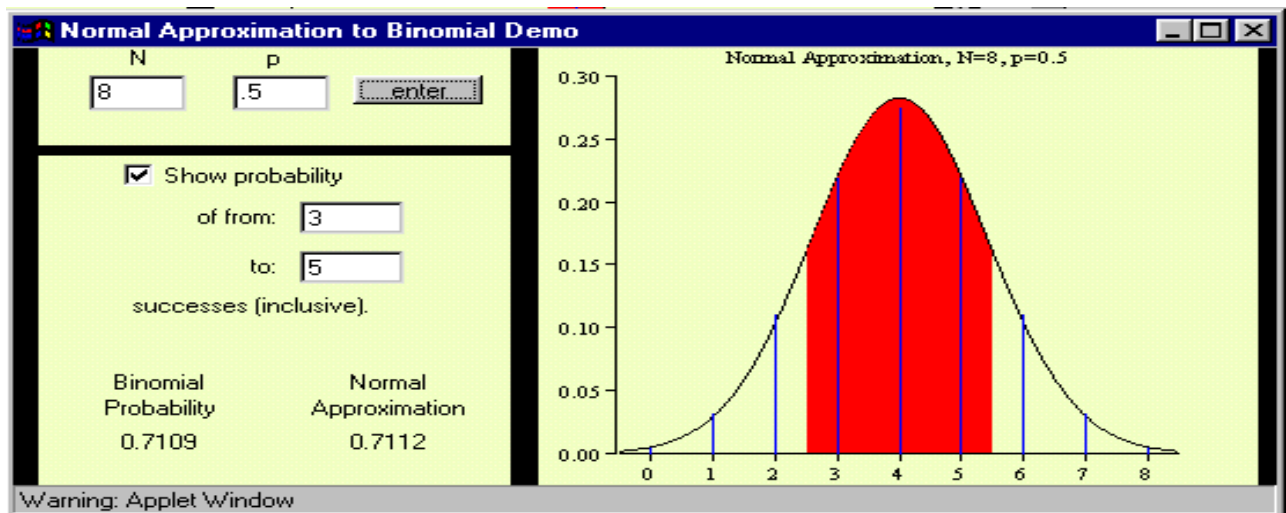
En el caso de una v.a. discreta, tiene sentido preguntarse por la probabilidad de que ésta tome un determinado valor. Sin embargo, si consideramos que la v.a. X es continua, entonces $P(X=a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$. Por este motivo tendremos que aplicar el llamado **factor de corrección por continuidad** que veremos a continuación, es decir, en el caso anterior calcularemos $P(a-0,5 < X < a+0,5)$.

Dicho valor 0,5 se suma o se resta, dependiendo de los requerimientos, a un valor seleccionado cuando una distribución de probabilidad discreta se aproxima por medio de una distribución continua.

Los posibles casos son:

- Para la probabilidad de que al menos X ocurra, se utilizará el área por encima de la curva ($X-0,5$)
- Para la probabilidad de que ocurra más que X , se utilizará el área por encima de la curva ($X+0,5$)
- Para la probabilidad de que ocurra X o menos, se utilizará el área por debajo de la curva ($X+0,5$)
- Para la probabilidad de que ocurra menos de X , se utilizará el área por debajo de la curva ($X-0,5$)

Si consultamos en: http://www.ruf.rice.edu/~lane/stat_sim/normal_approx/index.html, veremos mediante un applet muy sencillo la aproximación de una normal a una distribución binomial. Clicaremos en el botón *Begin*, que aparece a la parte superior izquierda de la pantalla, y cambiaremos el valor de N y p , así como los valores del intervalo.



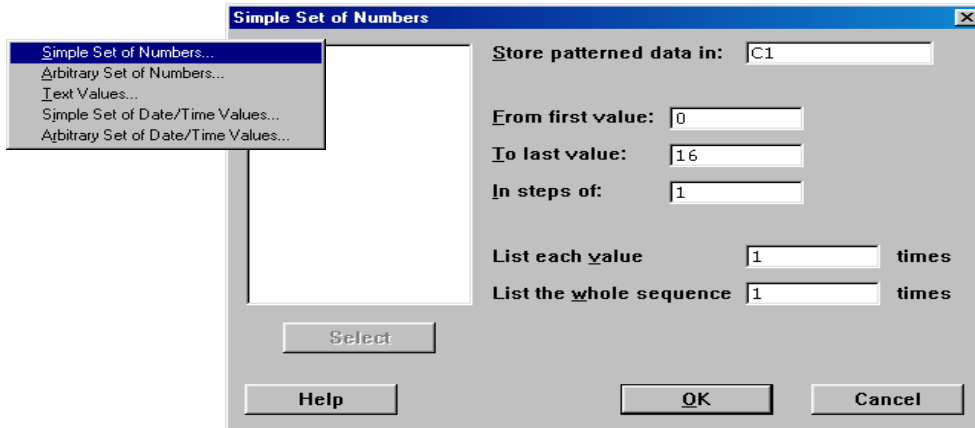
Para mostrar la aplicación de la aproximación normal a la binomial y la necesidad de un factor de corrección, veamos el siguiente ejemplo resuelto con Minitab:

Ejemplo:

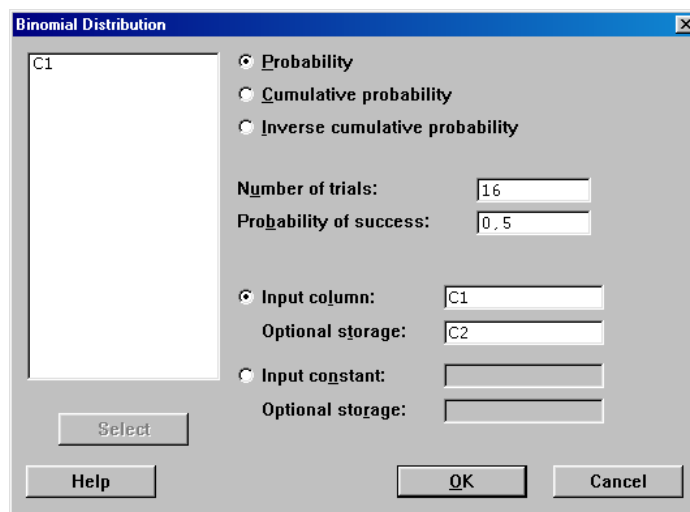
Para muchas combinaciones de n y p es posible aproximar bastante bien una distribución binomial $B(n,p)$ mediante una distribución normal de media $\mu = np$ y varianza $\sigma^2 = np(1-p)$. Generalmente, esta aproximación tiende a ser tanto mejor cuanto mayor es el número de pruebas n .

Introducimos en la columna C1 de una hoja de trabajo los números 0, 1, 2, ..., 16. En la columna C2 calcular $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, ..., $P(X = 16)$, siendo X una binomial de parámetros $n = 16$ y $p = 0,5$.

Seleccionamos: *Calc > Make Patterned Data > Simple Set of Numbers :*



Ahora hacemos: *Calc > Probability Distributions > Binomial :*



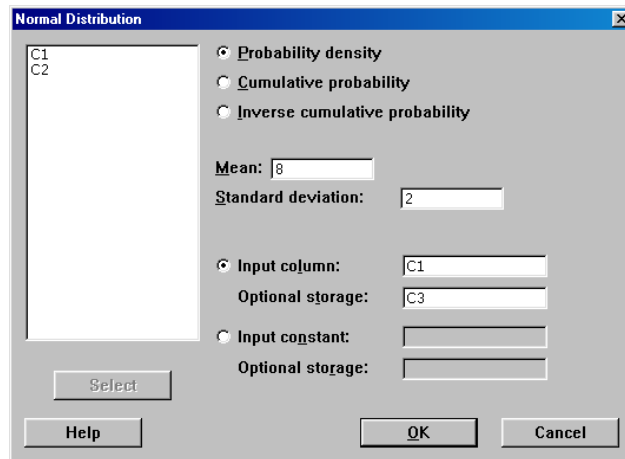
El resultado será el siguiente:

Data Display			
Row	C1	C2	
1	0	0,000015	
2	1	0,000244	
3	2	0,001831	
4	3	0,008545	
5	4	0,027771	
6	5	0,066650	
7	6	0,122192	
8	7	0,174561	
9	8	0,196381	
10	9	0,174561	
11	10	0,122192	
12	11	0,066650	
13	12	0,027771	
14	13	0,008545	
15	14	0,001831	
16	15	0,000244	
17	16	0,000015	

Ahora introducimos en la columna C3 el valor de la función de densidad de probabilidad (f.d.p.) asociada a los valores de la C1 para una distribución normal que aproxime a la binomial anterior.

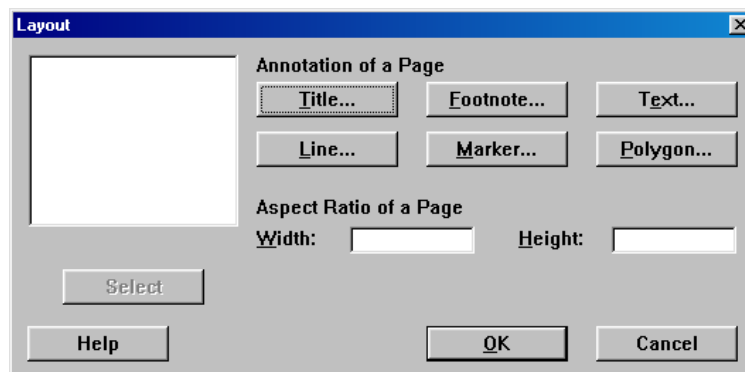
Observar que: $\mu = n \cdot p = 8$ y $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 4$

Hacemos: *Calc > Probability Distributions > Normal* :

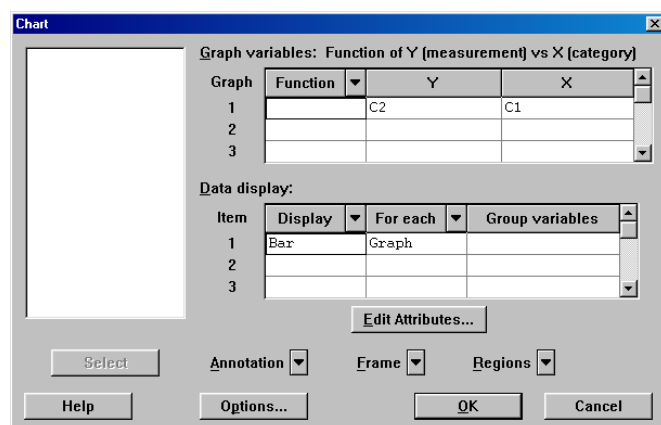


Dibujamos ahora, un diagrama de barras con los datos de las columnas C1 (en eje x) y C2 (en eje y). Superpuesto a él, dibujamos la función de densidad que se obtiene a partir de las columnas C1 (en eje x) y C3 (en eje y).

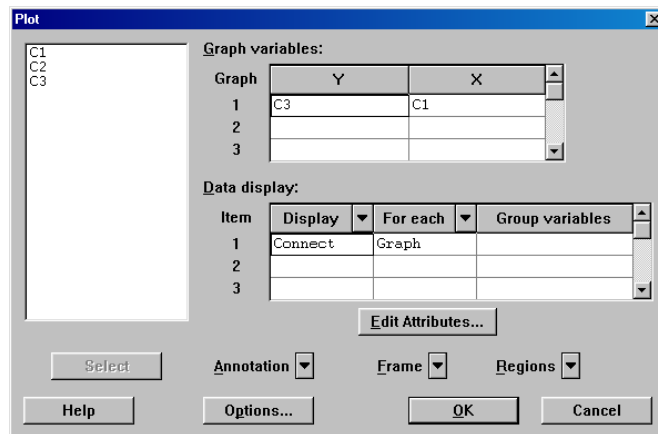
A fin de superponer ambos gráficos, elegimos la opción: *Graph > Layout* :



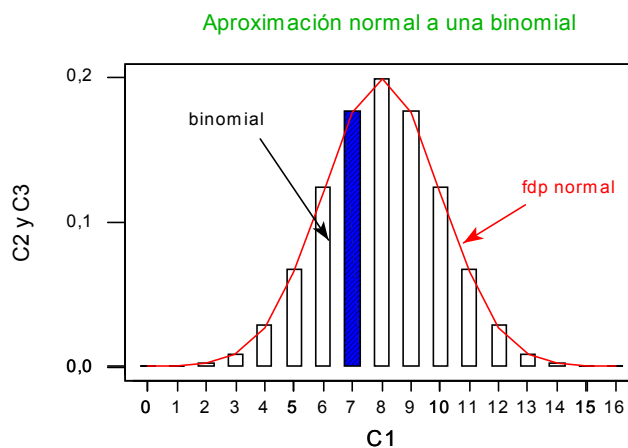
Seleccionamos: *Graph > Chart* :



Finalmente hacemos: *Graph > Plot :*



Para representar los gráficos superpuestos basta con hacer: *Graph > End Layout :*



A partir del gráfico anterior, observamos que podemos aproximar la probabilidad de que una variable binomial tome un determinado valor mediante la f.d.p. de una distribución normal. Así, por ejemplo, podemos estimar $P(X = 7)$ (área en azul) por $P(6,5 < X < 7,5)$ área comprendida entre la curva roja y ambos puntos). En el primer caso estamos considerando que la variable X es binomial, mientras que en el segundo consideramos que dicha variable es normal (y por tanto hacemos uso de la aproximación por continuidad, puesto que para cualquier variable continua la probabilidad puntual es cero).

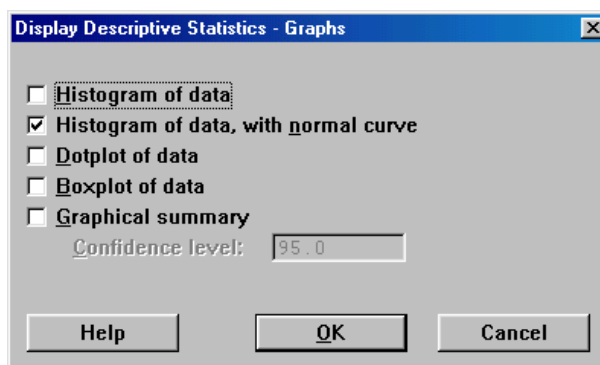
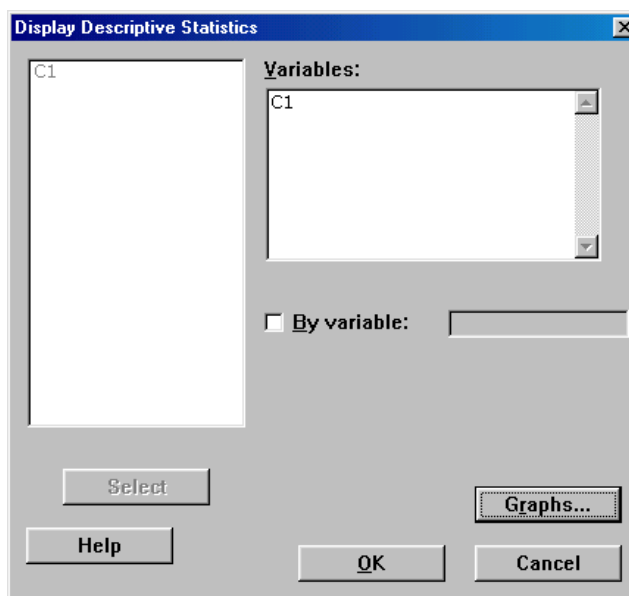
CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

1. Los siguientes resultados corresponden a los ingresos, en miles de euros, que se han realizado en 50 cajeros automáticos de una zona determinada durante un mes:

57	59	73	69	48	69	75	41	55	53	64	57	70
75	67	60	58	73	39	63	63	66	71	60	51	68
56	49	61	66	72	57	66	60	96	46	63	66	79
60	64	71	45	66	55	48	62	63	56	65		

a) Calcular los estadísticos descriptivos de los datos anteriores y comprobar, mediante un histograma y un gráfico de normalidad, si éstos siguen una distribución normal.

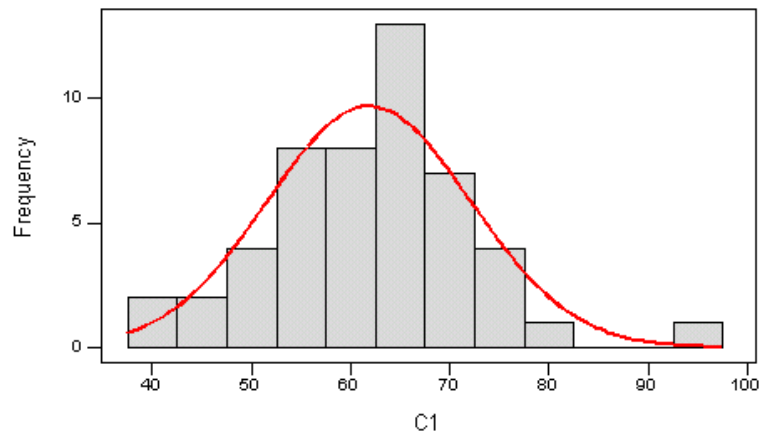
Seleccionamos *Stat > Basic Statistics > Display Descriptive Statistics > Graphs...* y escogemos la opción *Histogram of data, with normal curve* :



Obtenemos,

Descriptive Statistics						
Variable	N	Mean	Median	TrMean	StDev	SE Mean
C1	50	61.92	63.00	61.84	10.28	1.45
Variable	Minimum	Maximum	Q1	Q3		
C1	39.00	96.00	56.00	68.25		

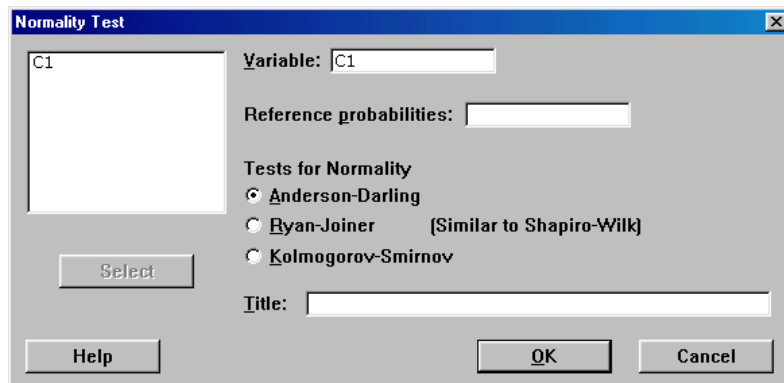
Histogram of C1, with Normal Curve

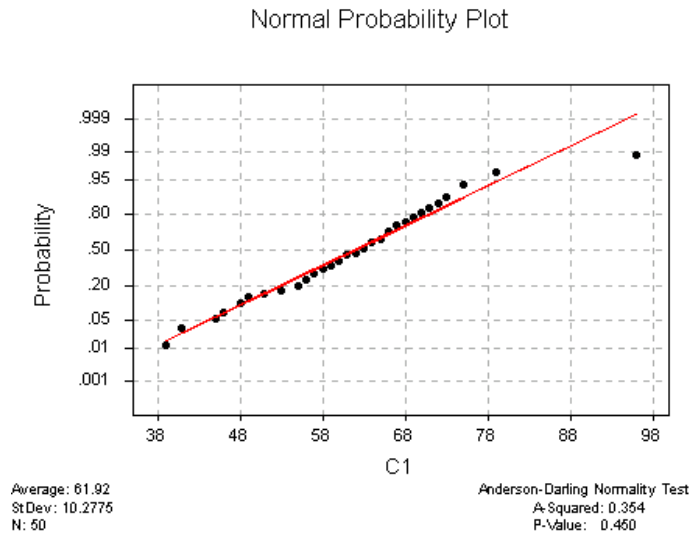


Por tanto, de este gráfico podemos observar que efectivamente el histograma muestra aproximadamente una curva simétrica semejante a la correspondiente a una distribución normal.

Además, si analizamos los parámetros estadísticos vemos que la media y la mediana toman valores bastante cercanos, lo cual propicia también que la distribución se aproxime a una normal.

Realizamos ahora el gráfico de normalidad. Seleccionamos *Stat > Basic Statistics > Normality Test*:

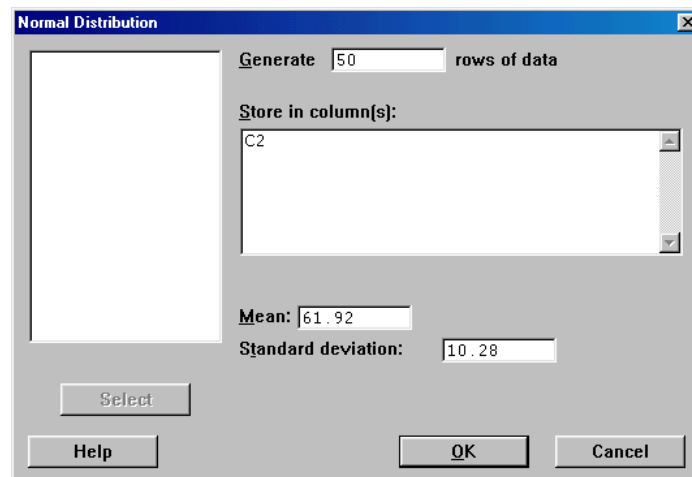




Como vemos, la mayoría de los puntos se encuentran sobre la línea roja, lo cual indica que estos datos se pueden aproximar por una distribución normal.

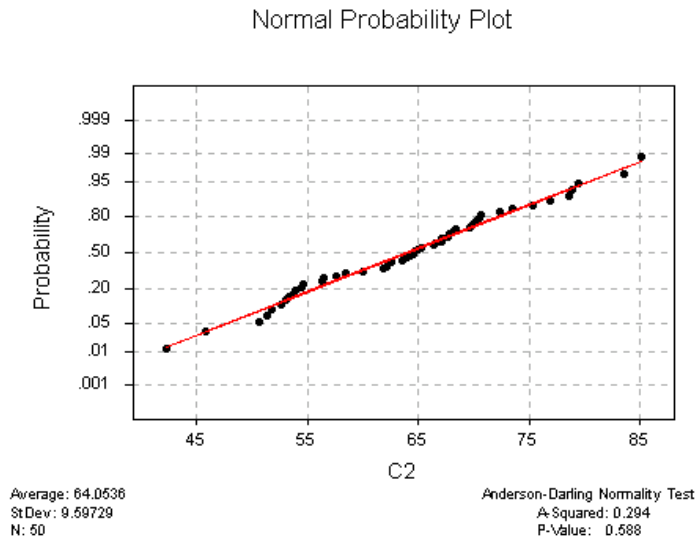
- b) Teniendo en cuenta la media y la desviación típica obtenida en el apartado anterior, simular con Minitab, los posibles resultados de los ingresos producidos en los mismos 50 cajeros durante el siguiente mes y comprobar mediante un gráfico de normalidad que, efectivamente, estos datos siguen una distribución normal .

Seleccionamos *Calc > Random Data > Normal* (guardad los datos en la columna C2):



Observar que obtendremos 50 datos que seguirán una distribución normal con media 62,92 y desviación típica 10,28, pero que serán diferentes a los datos de esta resolución y diferentes a los que cada uno de vosotros obtengáis.

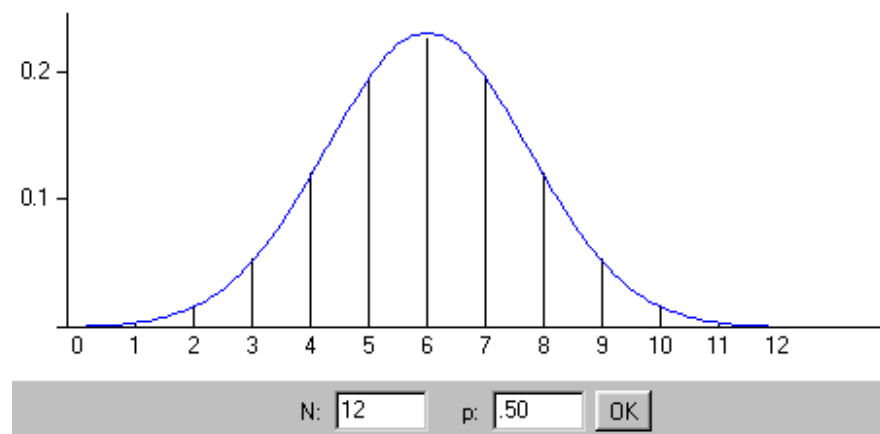
Calculamos ahora, el gráfico de normalidad seleccionando *Stat > Basic Statistics > Normality Test* :



Como vemos, claramente estos datos siguen una distribución normal como era de esperar ya que provienen de una normal.

- c) Ahora analizaremos los gráficos de funciones de probabilidad, para valorar *el ajuste de una binomial por una normal*. En la página web http://www.ruf.rice.edu/~lane/stat_sim/binom_demo.html encontraremos un gráfico que varía según cambiemos el número de pruebas n y la probabilidad de éxito p .

Así pues, tomaremos diversos valores para n (por ejemplo, $n=10, 100, 1000\dots$), y comentaremos los resultados explicando básicamente cómo varía el gráfico al aumentar el tamaño de la muestra.



El gráfico demuestra cómo mejora la distribución binomial por una normal, a medida que el valor del tamaño muestral n aumenta. Si vamos incrementando considerablemente el valor de n , observaremos que la distribución se va desplazando hacia la derecha porque la media toma el valor $n \cdot p$, además la distribución también se va aplanando porque la varianza aumenta al aumentar n .

2. “El Universo de los libros” es una librería recientemente inaugurada que, además de la propia consulta de libros, ofrece los servicios de cafetería.

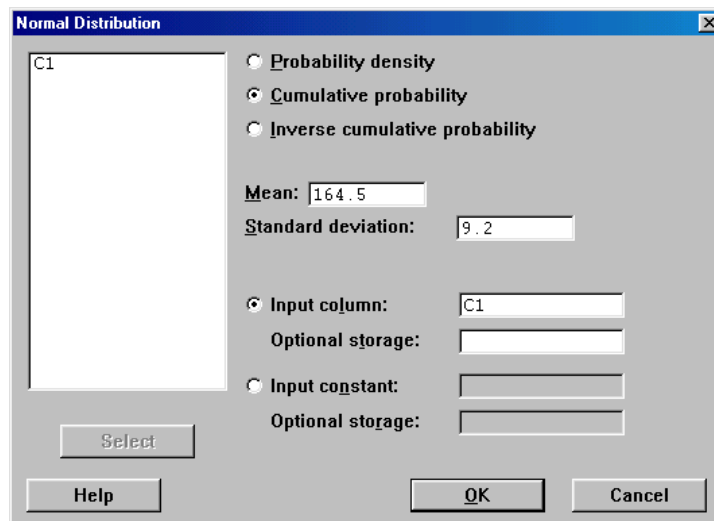
Para una próxima exposición en la Feria del libro, la empresa ha decidido solicitar a la fábrica textil “Textart”, la elaboración de camisetas promocionales de la librería.

Textart, decide hacer camisetas de tres tallas: L, XL, XXL. Dado que todas las camisetas serán bastante anchas, lo que hará optar por una talla u otra será la altura.

Para ello, Textart, tras realizar el estudio pertinente, concluye que las alturas de los posibles compradores potenciales seguirán una distribución normal, con media 164,5 cm. y desviación estándar 9,2 cm.

- a) Supongamos que la fábrica ya tiene los patrones hechos, y recomienda la talla L hasta 160 cm., talla XL hasta 180 cm. y talla XXL para alturas superiores. Bajo estas condiciones, ¿qué proporción de camisetas de cada tipo es razonable que se fabriquen?

Escribimos en la primera columna los números 160 y 180, y seleccionamos *Calc > Probability Distributions > Normal*, activando la opción *Cumulative Probability* y rellenando con la información de que disponemos:



Cumulative Distribution Function	
Normal with mean = 164.500 and standard deviation = 9.20000	
x	P(X <= x)
160.0000	0.3124
180.0000	0.9540

Por tanto,

$p(\text{talla L}) = p[X < 1,60] = 0,312$, es decir, el 31,2%

$p(\text{talla XL}) = p[1,60 < X < 1,80] = p[X < 1,80] - p[X < 1,60] = 64,2\%$

$p(\text{talla XXL}) = p[X > 1,80] = 1 - p[X < 1,80] = 4,6\%$

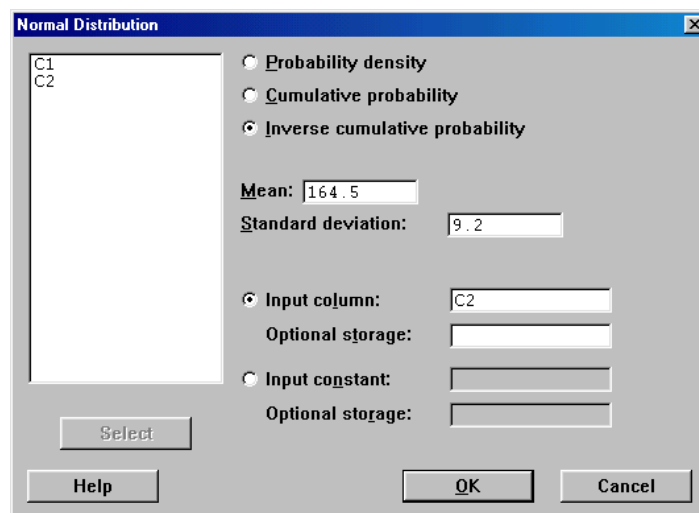
- b) Supongamos ahora, que por razones de mercado, la empresa cree conveniente fabricar el 10% de camisetas de la talla L, el 65% de la talla XL y el 25% restante de la talla XXL. ¿Cuáles serán los límites de alturas con que se tendría que diseñar cada talla?

En este apartado, como sabemos el valor de las probabilidades, lo que pretendemos calcular son los valores de la distribución. Para ello, tendremos que utilizar la opción de la *Probabilidad inversa acumulada*.

Es decir, queremos saber t , tal que $P(X < t) = 0.1$

De igual manera, buscamos c , tal que $P(X < c) = 0.75$ ($0.1 + 0.65$)
 Introducimos, en la columna C2, dichos valores (0.1, 0.75)

Seleccionamos *Calc > Probability Distributions > Normal*, y activamos *Inverse Cumulative Probability*, con C2 como *Input Column*:



Inverse Cumulative Distribution Function	
Normal with mean = 164.500 and standard deviation = 9.20000	
$P(X \leq x)$	x
0.1000	152.7097
0.7500	170.7053

Los valores de X obtenidos son las alturas en cm., que delimitarán las tallas porque son los valores que verifican las expresiones anteriores, es decir:

$$P(X < 152.71) = 0.1$$

$$P(X < 170.71) = 0.75$$

Área bajo la curva normal estándar: $P(Z < z)$ donde Z sigue una distrib. $N(0,1)$

z	segundo decimal de z									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Moya Anegón, F.; López Gijón, J.; García Caro, C. (1996): "Técnicas cuantitativas aplicadas a la biblioteconomía y documentación". Ed. Síntesis.
- [2] Lind, D.; Mason, R.; Marchal, W. (2001): "Estadística para Administración y Economía". Ed. Irwin McGraw-Hill.
- [3] Johnson, R. (1996): "Elementary Statistics". Ed. Duxbury.
- [4] Farber, E. (1995): "A Guide to Minitab". Ed. McGraw-Hill.

ENLACES

- ❑ http://www.unalmed.edu.co/~estadist/NORMAL/Distribucion_Normal.htm
Características básicas de una distribución normal.
- ❑ <http://es.geocities.com/riotorto/norm/norm.htm>
Página correspondiente a procesamientos estadísticos de datos biomédicos.
- ❑ http://www.ruf.rice.edu/~lane/stat_sim/normal_approx/index.html
Teoría y applets, relacionados con la aproximación de una normal a una binomial.
- ❑ <http://www.udc.es/dep/mate/recursos.html>
Selección de recursos en Internet para la enseñanza-aprendizaje de la Estadística.
- ❑ <http://psych.colorado.edu/~mcclella/java/normal/accurateNormal.html>
Applets relacionados con la representación de una distribución normal.