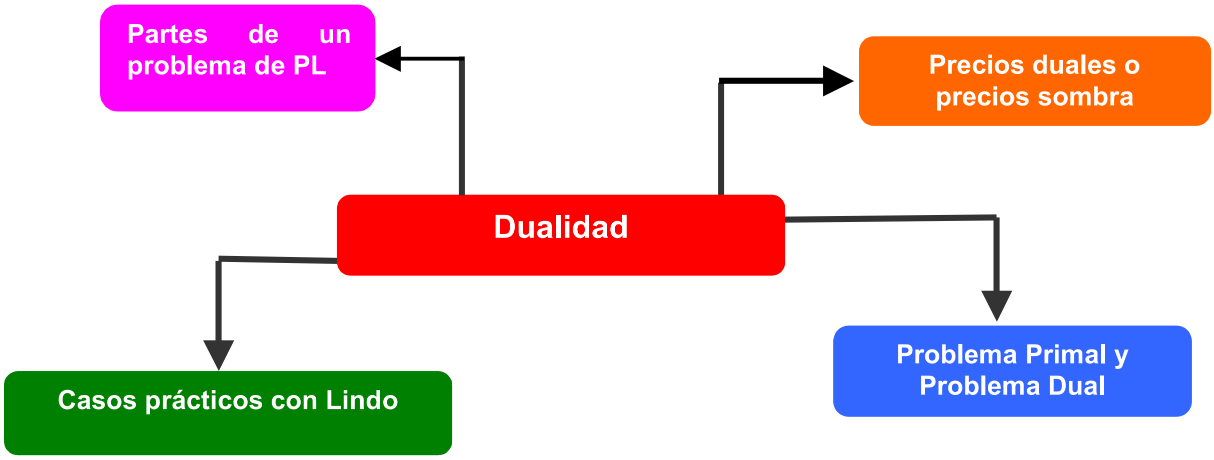
DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL CON LINDO

Autores: Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu), Javier Faulin (ffaulin@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

En el *math-block* **Introducción a la PL** vimos cómo usar el programa LINDO para resolver problemas de programación lineal. En este *maht-block* presentaremos el concepto de la dualidad, el cual cobra gran importancia dentro de la teoría general de la PL. Asimismo, usaremos nuevamente LINDO para obtener los precios sombra o duales de un problema, y veremos cual es la interpretación económica de los mismos.

En muchas ocasiones, puede resultar más eficiente (y, a efectos de solución, equivalente) resolver el llamado problema dual que el problema original al que nos enfrentamos. Por su parte, el análisis de los precios sombra o precios duales nos puede ayudar a valorar adecuadamente las limitaciones impuestas por cada una de las restricciones.

OBJETIVOS

- Aprender a distinguir las partes que constituyen un problema de PL.
- Comprender el concepto de precios duales (o precios sombra), y saber aplicarlo para tomar decisiones sobre los recursos disponibles.
- Saber hallar el problema dual de un problema dado.
- Familiarizarse con el uso de LINDO para hallar e interpretar los precios duales.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Aparte de estar iniciado en el uso de LINDO (www.lindo.com), conviene haber leído previamente los siguientes *math-blocks*:

- Introducción a la Investigación Operativa.
- Introducción a la Programación Lineal.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Partes de un problema de PL

Dado un problema de PL, podemos distinguir en él las siguientes partes de interés:

1. Los coeficientes de la función objetivo o **coeficientes objetivo**.
2. Los **coeficientes tecnológicos**: aquellos coeficientes que afectan a las variables de las restricciones, situados a la izquierda de la desigualdad. Se llaman así porque habitualmente describen capacidades tecnológicas en problemas de optimización lineal de costes de producción
3. Los recursos disponibles o ***Right-Hand-Side***: los términos independientes de cada restricción, situados a la derecha de la desigualdad.

Coeficientes Objetivo

MAX $\quad$ **10** X + **20** Y

Recursos (RHS)

ST

3 X + **1** Y **<= 9**
1 X **- 3** Y **<= 5**

Coeficientes Tecnológicos

Precios sombra o duales

Cuando usemos Lindo –o cualquier software de similares característica- para resolver un problema de PL, no sólo obtendremos la solución del mismo –caso de que exista-, sino también los llamados **precios sombra** o precios duales.

Cada precio sombra estará asociado a una restricción del problema, y nos indicará en cuánto "mejoraría" la función objetivo –evaluada en el punto solución- si dicha restricción se "relajase" en una unidad. En el contexto anterior, "mejorar" significa: "aumentar" en el caso de un problema de maximización, y "disminuir" en el caso de un problema de minimización. Por su parte, "relajar" una restricción en una unidad significa: "incrementar" el RHS en una unidad en caso de que la restricción sea con <=, y "disminuir" el RHS en una unidad en caso de que la restricción sea con >=.

Ejemplo: Resolveremos con LINDO el problema anterior (recordar que, por defecto, LINDO ya presupone que todas las variables de la función objetivo han de ser no negativas, i.e.: X >= 0, Y >= 0):

```
<untitled>
MAX 10X + 20Y

ST
        3X + Y <= 9
        X - 3Y <= 5

END
```

LINDO nos ofrece la siguiente ventana de resultados:

```
Reports Window

 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)       180.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X         0.000000         50.000000
         Y         9.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         20.000000
        3)        32.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       1
```

A partir de la salida anterior, sabemos que la función objetivo alcanza un valor máximo de 180 para X = 0 e Y = 9 –en otras palabras, el punto (0,9) es solución del problema.

La columna SLACK OR SURPLUS nos dice que para X = 0 e Y = 9 la primera de las restricciones se verifica en igualdad (en efecto, 3·0 + 9 = 9). Ello significa que, en el punto solución, estamos agotando todos los recursos asociados a dicha restricción (SURPLUS = 0), por lo que cabe pensar que si relajásemos dicha restricción en una unidad, podríamos hallar una nueva solución que mejorase aún más la función objetivo. La columna DUAL PRICES nos aclara que, en efecto, si en lugar de tener un valor de 9 en el RHS de la primera restricción tuviésemos un valor de 10 (incrementamos en una unidad, ya que es un <=), la función objetivo en el óptimo llegaría a 200 (mejoraría en 20 unidades). Por lo que a la segunda restricción se refiere, observamos que en el óptimo "sobran" recursos (en efecto, 0 - 3·9 = - 27 < 5). Puesto que no estamos agotando los recursos asociados a esta restricción, cabe pensar que no lograremos mejorar la función objetivo al relajar en una unidad la restricción. En efecto, el ventana de resultados muestra un precio dual asociado de 0.

Problemas Primales y Problemas Duales

Dado un problema de PL, al cual llamaremos **problema primal** (**P**), existirá siempre otro problema de PL unívocamente asociado al primal, y al cual llamaremos **problema dual** (**D**). La dualidad es importante por el hecho de que es equivalente resolver un problema a resolver su dual. Ello es debido a que los precios sombra (o precios duales) de D son las soluciones (salvo signo) de P y viceversa. Así, en ocasiones, puede resultar conveniente obtener las soluciones de P a partir de los precios sombra de D en vez de resolver P directamente.

Supongamos que tenemos un problema lineal P, el cual tiene n variables ($X_1, X_2, ..., X_n$) y m restricciones. Observar que siempre será posible expresar dicho problema en la forma siguiente:

$$
\text{P} \left\{
\begin{array}{ll}
\text{MAX} & c_1 X_1 + c_2 X_2 + ... + c_n X_n \\
\text{ST} & \\
& \boxed{a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + ... + a_{1n} X_n <= b_1} \\
& a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + ... + a_{2n} X_n <= b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + ... + a_{mn} X_n <= b_m \\
& \qquad X_i >= 0
\end{array}
\right.
$$

En efecto:

- Si el problema P fuese un problema de minimizar, se podría cambiar por otro de maximizar sin más que tener en cuenta que **Minimizar f(X) equivale a - Maximizar –f(X)**.
- Una restricción de la forma **>= se puede cambiar por otra equivalente de la forma <= multiplicando por –1** a ambos lados de la desigualdad.
- Si alguna de las restricciones es **una igualdad** estricta, ésta **se puede sustituir por dos desigualdades** de sentido contrario; por ejemplo, la restricción 2X + 3Y = 5 es equivalente a las dos restricciones (ambas a la vez) 2X + 3Y >= 5 y 2X + 3Y <= 5.

Pues bien, para calcular el dual de P, expresado en la forma anterior, tendremos que dar los siguientes pasos:

(1) Si el objetivo en P es Maximizar f(X), el objetivo en D será Minimizar f(X).
(2) El *Right-Hand-Side* de P ($b_1, b_2, ..., b_m$), serán los coeficientes objetivos de D.
(3) Los coeficientes objetivos de P ($c_1, c_2, ..., c_n$), serán el *Right-Hand-Side* de D.
(4) La transposición de los coeficientes tecnológicos de P serán los coeficientes tecnológicos de D.
(5) Las restricciones cambian de sentido.

Por consiguiente, el dual de P tendría la forma siguiente:

$$
\text{D} \left\{
\begin{array}{ll}
\text{MIN} & b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + ... + b_m Y_m \\
\text{ST} & \\
& a_{11} Y_1 + a_{21} Y_2 + ... + a_{m1} Y_m >= c_1 \\
& a_{12} Y_1 + a_{22} Y_2 + ... + a_{m2} Y_m >= c_2 \\
& \vdots \\
& a_{1n} Y_1 + a_{2n} Y_2 + ... + a_{mn} Y_m >= c_n \\
& \qquad Y_i >= 0
\end{array}
\right.
$$

Ejemplo 1: Supongamos que el problema primal tiene 100 variables y 20.000 restricciones. ¿Cuántas variables y restricciones tendrá el problema dual?.

En este caso, el problema dual estará constituido por 20.000 variables y 100 restricciones.

Ejemplo 2: Hallar el dual del siguiente problema de PL:

Minimizar 4 X1 + 13 X2
Sujeto a:

18 X1 + 12 X2 <= 3
6 X1 + 2 X2 = 17
X1 >= 0, X2 >= 0

El problema anterior se puede rescribir como:

Maximizar - 4 X1 - 13 X2
Sujeto a:

18 X1 + 12 X2 <= 3
6 X1 + 2 X2 <= 17
- 6 X1 - 2 X2 <= - 17

X1 >= 0, X2 >= 0

Ahora, podemos hallar el dual:

Minimizar 3 Y1 + 17 Y2 – 17 Y3
Sujeto a:

18 Y1 + 6 Y2 – 6 Y3 <= - 4
12 Y1 + 2 Y2 – 2 Y3 <= - 13

Y1 >= 0, Y2 >= 0, Y3 >= 0

Otra propiedad interesante, consecuencia de la propia definición de problema dual, es que si consideramos D como un problema de PL y calculamos su dual, obtendremos nuevamente el primal original P, i.e.: “el dual del dual es el primal”. Por eso se dice que la dualidad es involutiva. Veremos a continuación un ejemplo que nos clarificará estas ideas:

Consideremos el problema primal P situado en la esquina superior izquierda. Según lo dicho anteriormente, su dual asociado (D) será el problema planteado a su derecha, el cual podemos rescribir (usando los procedimientos ya explicados) de la forma que se muestra en la parte inferior derecha. Calculando el dual de esta última formulación de D obtenemos DD (el dual del dual), el cual resulta ser equivalente al problema primal original P:

P

```
MAX    5 X1 + 8 X2 + 10 X3

ST
          2 X2 +    X3 <=  100
         10 X2 +  4 X3 <=  400
2 X1 +    2 X2 + 10 X3 <= 1000
2 X1 +    4 X2 +  4 X3 <=  500
- X1 +    2 X2 +  2 X3 <=    0

END
```

D

```
MIN    100 Y1 + 400 Y2 + 1000 Y3 + 500 Y4

ST

                 2 Y3 + 2 Y4 -    Y5 >=  5
2 Y1 + 10 Y2 +   2 Y3 + 4 Y4 + 2 Y5 >=  8
  Y1 +  4 Y2 + 10 Y3 + 4 Y4 + 2 Y5 >= 10

END
```

DD

```
MIN      - 5 X1 - 8 X2 - 10 X3

ST
        -  2 X2 -    X3 >=  -100
        - 10 X2 -  4 X3 >=  -400
-2 X1 -    2 X2 - 10 X3 >= -1000
-2 X1 -    4 X2 -  4 X3 >=  -500
   X1 -    2 X2 -  2 X3 >=     0

END
```

D

```
MAX     - 100Y1 - 400Y2 - 1000Y3 - 500Y4
ST

                 - 2 Y3 - 2 Y4 + Y5 <= -5
-2 Y1 - 10 Y2 -   2 Y3 - 4 Y4 - 2 Y5 <= - 8
-   Y1 -  4 Y2 - 10 Y3 - 4 Y4 - 2 Y5 <= -10

END
```

Estudiemos ahora la ventana de resultados (generada por LINDO) del primal P y su dual D:

P

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

    OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)       1250.000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1      250.000000          0.000000
      X2        0.000000          2.000000
      X3        0.000000          0.000000

    ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)      100.000000          0.000000
     3)      400.000000          0.000000
     4)      500.000000          0.000000
     5)        0.000000          2.500000
     6)      250.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       1
```

D

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      4

  OBJECTIVE FUNCTION VALUE
  1)       1250.000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      Y1        0.000000        100.000000
      Y2        0.000000        400.000000
      Y3        0.000000        500.000000
      Y4        2.500000          0.000000
      Y5        0.000000        250.000000

   ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    2)        0.000000        -250.000000
    3)        2.000000           0.000000
    4)        0.000000           0.000000

NO. ITERATIONS=       4
```

Examinando estos resultados, queda claro lo que comentábamos al inicio del apartado: los precios sombra del problema dual coinciden con las soluciones del primal, y viceversa. Observar además que el valor de la función objetivo en ambos casos es el mismo (1.250), cosa que siempre ocurrirá.

Una última observación: en ocasiones puede ocurrir que, examinando dos ventanas de resultados como las anteriores, no coincidan la columna de precios sombra del dual y las soluciones del primal. Ello se debe a que el problema en cuestión tiene múltiples soluciones óptimas, y a que LINDO nos ha dado dos distintas.

A título de curiosidad:

El concepto de **precio sombra** tiene un origen económico latente en Microeconomía. Se define como *el precio o valor imputados a una mercancía o servicio en donde tal precio o valor no puede ser determinado precisamente*, debido bien a la ausencia de un mercado ordinario determinante de precios, bien a la existencia de grandes distorsiones en los mercados en los que la mercancía o servicio estén presentes. (Tomado de Pass, C., Lowes, B. y Davies, L. (1993): *Dictionary of Economics*. Harper Collins Publishers)

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

Ejemplo 3: Dado el problema de PL siguiente, determinar su dual asociado y resolver ambos problemas:

Minimizar $5X1 + 2X2 + X3$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
2X1 + 3X2 + X3 &\geq 20\\
6X1 + 8X2 + 5X3 &\geq 30\\
7X1 + X2 + 3X3 &\geq 40\\
X1 + 2X2 + 4X3 &\geq 50\\
X1, X2, X3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

```
<untitled>
MIN      5 X1 + 2 X2 + X3
ST
         2 X1 + 3 X2 +    X3 >= 20
         6 X1 + 8 X2 + 5 X3 >= 30
         7 X1 +    X2 + 3 X3 >= 40
              X1 + 2 X2 + 4 X3 >= 50
END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP        2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)        17.50000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         0.000000          2.875000
        X2         2.500000          0.000000
        X3        12.500000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         -0.625000
        3)        52.500000          0.000000
        4)         0.000000         -0.125000
        5)         5.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=        2
```

El problema dual es:

```
<untitled>
MAX      20 Y1 + 30 Y2 + 40 Y3 + 50 Y4
ST
         2 Y1 + 6 Y2 + 7 Y3 +    Y4 <= 5
         3 Y1 + 8 Y2 +    Y3 + 2 Y4 <= 2
              Y1 + 5 Y2 + 3 Y3 + 4 Y4 <= 1

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       3

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)        17.50000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         0.625000          0.000000
        Y2         0.000000         52.500000
        Y3         0.125000          0.000000
        Y4         0.000000          5.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         2.875000          0.000000
        3)         0.000000          2.500000
        4)         0.000000         12.500000

 NO. ITERATIONS=       3
```

Ejemplo 4: Para alimentar a un grupo de vacas disponemos de tres tipos de alimentos:

Tabla de costes				
Alimento	**Materia seca**	**Proteínas**	**Grasa**	**Coste (euros)**
Alfalfa	1	0	2	1
Avena	0	3	1	2
Ensilaje	1	2	0	1,5

La ración diaria para mantener a estos animales debe contener como mínimo 4 unidades de materia seca y 5 de proteínas, y la grasa no debe superar las 15 unidades.

(a) ¿Cuál sería la ración más barata que se puede preparar con estos alimentos?

(b) Plantear el problema dual y resolverlo, comparando las soluciones con la ventana de resultados obtenida en el apartado anterior.

(a) El problema anterior se puede formular de la siguiente forma:

```
<untitled>
MIN      ALF + 2 AVE + 1.5 ENS

ST
           ALF +           ENS >= 4
                 3 AVE + 2 ENS >= 5
         2 ALF +   AVE         <= 15

END
```

Reports Window

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      5.250000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      ALF         1.500000          0.000000
      AVE         0.000000          1.250000
      ENS         2.500000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000         -1.000000
       3)         0.000000         -0.250000
       4)        12.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

A partir de la ventana de resultados, comprobamos que minimizaremos los costes usando 1,5 unidades de alfalfa y 2,5 unidades de ensilaje para preparar la ración. El coste asociado es de 5,25 euros por ración.

En la ventana de resultados se observa, además, que en el punto óptimo las dos primeras restricciones se cumplirán en igualdad (SLACK OR SURPLUS = 0), mientras que en el caso de la tercera queda aún un margen amplio de 12 unidades para "saturarla". Por tanto, es lógico pensar que el precio dual asociado a la última restricción será cero (como así se aprecia en la ventana de resultados), mientras que en el caso de las dos primeras restricciones, los precios duales son distintos de cero. Concretamente, se aprecia que: si redujésemos en una unidad la primera restricción (i.e., si tuviésemos >= 3 en lugar de >= 4), el coste óptimo disminuiría en 1 euro. Análogamente, si relajásemos la segunda de las restricciones en una unidad, el coste óptimo disminuiría en 0,25 euros.

(b) El problema anterior puede formularse como:

```
- MAX      - ALF - 2 AVE - 1.5 ENS
 ST
            - ALF          -   ENS <= - 4
                  - 3 AVE - 2 ENS <= -5
           2 ALF +   AVE           <= 15

           ALF >= 0, AVE >= 0, ENS >= 0
```

Por tanto, el problema dual asociado será:

```
<untitled>

MIN      - 4 Y1 - 5 Y2 + 15 Y3
ST
          - Y1         + 2 Y3 >= - 1
               - 3 Y2 +    Y3 >= - 5
          - Y1 - 2 Y2         >= - 1.5

END
```

Cuya solución es:

```
Reports Window

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      -5.250000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        Y1         1.000000          0.000000
        Y2         0.250000          0.000000
        Y3         0.000000         12.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         -1.500000
        3)         4.250000          0.000000
        4)         0.000000         -2.500000

 NO. ITERATIONS=       2
```

Observar que el valor obtenido para la función objetivo en el óptimo coincide (al cambiar el signo) con el valor obtenido para el problema primal.

Así mismo, los valores que determinan la solución del dual coinciden (salvo signo) con los precios sombra que habíamos obtenido para el primal. Finalmente, los precios sombra del dual son (salvo signo) los valores que definían la solución del primal.

Ejemplo 5: Queremos resolver el siguiente problema de PL:

Maximizar   4 X1 + X2 + 2 X3
Sujeto a:

2 X1 + 3 X2 + 5 X3 <= 100
X1 + 5 X2 -   X3 >= 20
X1 – 2 X2 + 4 X3 <= 200
X1, X2, X3 >= 0

(a) ¿Cuál es la solución óptima?

(b) ¿Cuánto valen los precios sombra?

(a) Podemos resolver este problema con LINDO, obteniendo la siguiente ventana de resultados:

```
<untitled>
MAX    4 X1 + X2 + 2 X3
ST
         2 X1 + 3 X2   + 5 X3 <= 100
           X1 + 5 X2   -   X3 >= 20
           X1 - 2 X2   + 4 X3 <= 200

END
```

A fin de poder contestar a preguntas posteriores, optaremos por la opción "SI" cuando el programa nos pregunte si deseamos realizar un análisis del rango o de sensibilidad:

```
LINDO
DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?
    Sí        No
```

```
Reports Window
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      200.0000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1        50.000000          0.000000
       X2         0.000000          5.000000
       X3         0.000000          8.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          2.000000
       3)        30.000000          0.000000
       4)       150.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       1


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE          DECREASE
      X1        4.000000         INFINITY          3.200000
      X2        1.000000         5.000000          INFINITY
      X3        2.000000         8.000000          INFINITY

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE          DECREASE
       2      100.000000       300.000000         60.000000
       3       20.000000        30.000000          INFINITY
       4      200.000000         INFINITY        150.000000
```

(b) El precio sombra o precio dual de la primera restricción toma un valor de 2, lo cual significa que por cada unidad en que relajásemos la restricción asociada, lograríamos mejorar la función objetivo en 2 unidades (y viceversa). Este "por cada unidad" tiene, obviamente, un límite: el RIGHTAND SIDE RANGES nos proporciona los rangos en que estos precios sombra tienen sentido: en este caso, el precio sombra asociado a la primera restricción tendría sentido siempre que no aumentásemos el RHS asociado en más de 300 unidades ni lo disminuyamos en más de 60 unidades.

Los precios duales asociados al resto de restricciones son cero, lo cual es lógico si tenemos en cuenta que, en el punto óptimo, dichas restricciones no se llegan a cumplir en igualdad (i.e.: no se "saturan"), por lo que relajarlas no proporciona ninguna mejora sobre el valor de la función objetivo en el óptimo.

Ejemplo 6: Queremos resolver el siguiente problema de PL referido a una compañía que produce dos tipos de lanchas acuáticas:

Maximizar beneficios = 30 X1 + 80 X2
Sujeto a:

2 X1 + 4 X2 <= 1.000 (horas de mano de obra disponibles)
6 X1 + 2 X2 <= 1.200 (kg. de materia prima disponibles)
X2 <= 200 (motores de lancha tipo 2 disponibles)
X1, X2 >= 0

(a) ¿Cuál es la mejor combinación productiva? ¿Cuál es el beneficio máximo?

(b) ¿Cuánto valen los precios sombra? Una vez alcanzada la solución óptima, ¿qué recurso tiene un valor marginal más elevado?

(c) Para cada recurso, ¿cuál es el rango de tolerancia en el que son válidos los precios sombra?

(d) Plantear y resolver el problema dual.

```
 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      19000.00

  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
        X1        100.000000          0.000000
        X2        200.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         15.000000
        3)       200.000000          0.000000
        4)         0.000000         20.000000

  NO. ITERATIONS=       2

  RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
  VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
        X1       30.000000        10.000000        30.000000
        X2       80.000000         INFINITY        20.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
       ROW         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                     RHS          INCREASE         DECREASE
         2     1000.000000        66.666664       200.000000
         3     1200.000000         INFINITY       200.000000
         4      200.000000        50.000000        20.000000
```

(a) Se observa en la ventana de resultados que lo óptimo será producir 100 lanchas de tipo 1 y 200 de tipo 2, lo cual nos proporcionará unos beneficios de 19.000 €.

(b) El precio dual de la primera restricción es de 15, lo cual significa que estaríamos dispuestos a pagar hasta 15 € por disponer de una hora más de mano de obra. El precio dual de la segunda restricción es 0, lo cual resulta lógico dado que no agotamos toda la materia prima disponible (en el óptimo aún nos sobran 200 kg.). Finalmente, estaríamos dispuestos a pagar hasta 20 € por disponer de un motor adicional de tipo 2, lo que convierte este recurso en el de mayor valor marginal.

(c) Los precios sombra anteriores son válidos en los rangos establecidos por la ventana de resultados. Así, por ejemplo, nuestros beneficios aumentarían en aproximadamente 15 € por cada hora extra de que dispusiésemos hasta un máximo de 1.066,67 horas, cifra a partir de la cual deberíamos replantear el problema para poder hacer un análisis correcto. Por otro lado, perderemos aproximadamente 15 € por cada hora que se deduzca de las disponibles inicialmente (1.000) hasta un máximo de 200 horas deducidas (a partir de aquí cabría reprogramar haciendo un análisis de sensibilidad).

(d) El problema dual sería:

```
Min         1000 U1 + 1200 U2 + 200 U3
Sujeto a:
                  2 U1 + 6 U2        >= 30
                  4 U1 + 2 U2 + U3 >= 80
                        U1, U2, U3 >= 0
```

```
        LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

                OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                1)      19000.00

          VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
                U1        15.000000           0.000000
                U2         0.000000         200.000000
                U3        20.000000           0.000000


               ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
                2)         0.000000      -100.000000
                3)         0.000000      -200.000000

         NO. ITERATIONS=        1
```

Como se esperaba, la solución del dual son los precios sombra del primal. Análogamente, los precios sombra del dual coinciden (en valor absoluto) con la solución del primal.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Anderson, D. R., Sweeney, D.J. and Williams, T.A. (2001): *Quantitative Methods for Business*. South-Western Thompson Learning.

[2] Hillier, F.S., Hillier, M.S. and Lieberman, G. J. (2000): *Introduction to Management Science. A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*. McGraw-Hill.

[3] Hillier, F.S. and Lieberman, G. J. (2001): *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill.

[4] Schrage, Linus (1997): *Optimization Modeling with LINDO.* Duxbury.

[5] Winston, W. L. (1994): *Operations Research. Applications and Algorithms*. Duxbury.

Todas estas referencias salvo la [3], disponen de traducción al español.

ENLACES

- http://www.lindo.com
  Página web del software LINDO.
- http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/90-XX.html
  Web con recursos sobre programación lineal.
- http://www.personal.psu.edu/faculty/t/m/tmc7/tmclinks.html
  Web con recursos sobre programación lineal.
- http://www.opsmanagement.com/
  Web de OPSMANAGEMENT.COM (recursos sobre dirección de operaciones).
- http://www.rpi.edu/~mitchj/sites_or.html
  Enlaces a webs sobre investigación operativa.
- http://lionhrtpub.com/ORMS.html
  ORMS Journal.
- http://www.pitt.edu/~jrclass/or/or-intro.doc
  Artículo introductorio a la Investigación Operativa y sus aplicaciones.
- http://www.kem.ae.poznan.pl/Books/Excel-Solver/T1/T1.htm
  Tutorial sobre optimización con Excel-Solver.