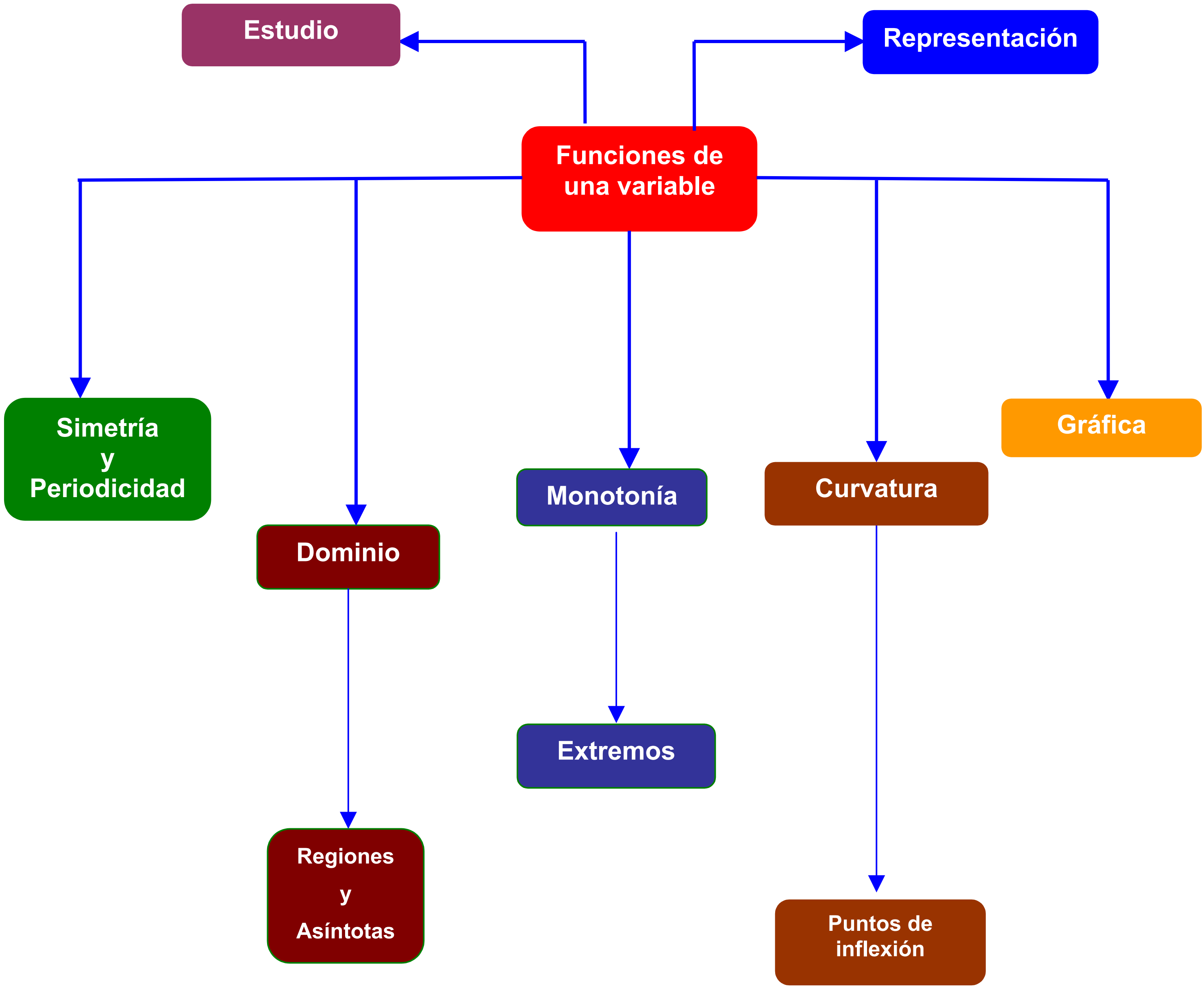
ESTUDIO LOCAL Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN 2D

Autores: Paco Martínez (jmartinezbos@uoc.edu), Patrici Molinàs (pmolinas@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

El principal objetivo de este tema es alcanzar un amplio conocimiento del comportamiento de una función real de una variable en cualquier punto de su dominio. También, pretendemos ser capaces de determinar los elementos gráficos más significativos de cualquier función sólo con el conocimiento de su expresión analítica.

En el tema presentamos los elementos fundamentales para efectuar un estudio local de una función alrededor de un punto, es decir, para ser capaz de determinar si en dicho entorno la función es creciente o decreciente, si es cóncava o convexa, si presenta un máximo o un mínimo, etc. También describiremos los comportamientos asintóticos que presentan algunas funciones.

En muchos problemas científico-técnicos existe una dependencia entre las diferentes magnitudes o variables que intervienen y, a menudo, la planteamos en forma de función para poder entenderlos y estudiarlos mejor.

OBJETIVOS

1. Ver la simetría y periodicidad de una función.
2. Calcular el dominio de una función.
3. Encontrar los puntos de corte de una función con los ejes.
4. Representar las regiones: signos de la función.
5. Determinación de los intervalos de monotonía: extremos relativos.
6. Comportamientos asintóticos de una función: ramas infinitas.
7. Determinación de los intervalos de curvatura: puntos de inflexión.
8. Representación gráfica de la función.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir con éxito esta unidad es recomendable haberse leído los siguientes Math-blocks: Uso básico del Mathcad, Funciones de una variable, Límites de funciones, Continuidad y Derivación.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- **Método para representar gráficamente una función:**

Etapa previa:

- Comprobar si f es par [f(x)=f(-x)], o impar [f(x)=-f(x)]. Si es así, basta estudiarla en R^+. Ver Figura 1.

- Comprobar si f es periódica f(x)=f(x+k), k es el periodo. Si lo es, basta estudiarla en un intervalo de longitud igual a un periodo. Ver Figura 2.

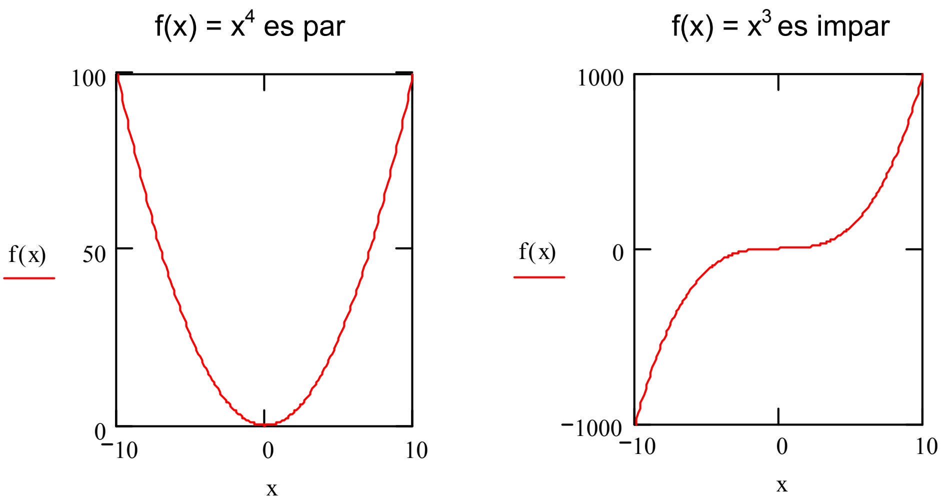


Figura 1

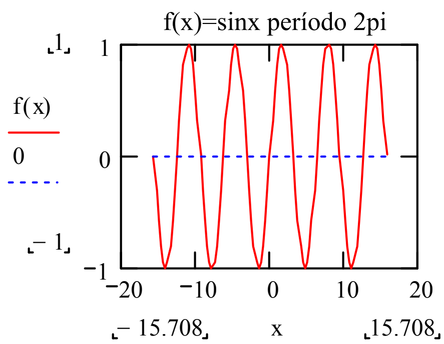
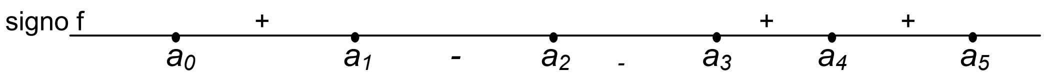


Figura 2

Primera etapa:

- Determinar las regiones de f, señalando el dominio sobre la recta real junto a las discontinuidades de f (nos darán las asíntotas verticales), sus raíces (puntos de corte con el eje de abcisas) y los puntos donde la función cambia de tramos: Sean estos puntos: a_0, a_1, ...,a_n. Así sabremos los intervalos en que f es positiva o negativa. Ver esquema 1.



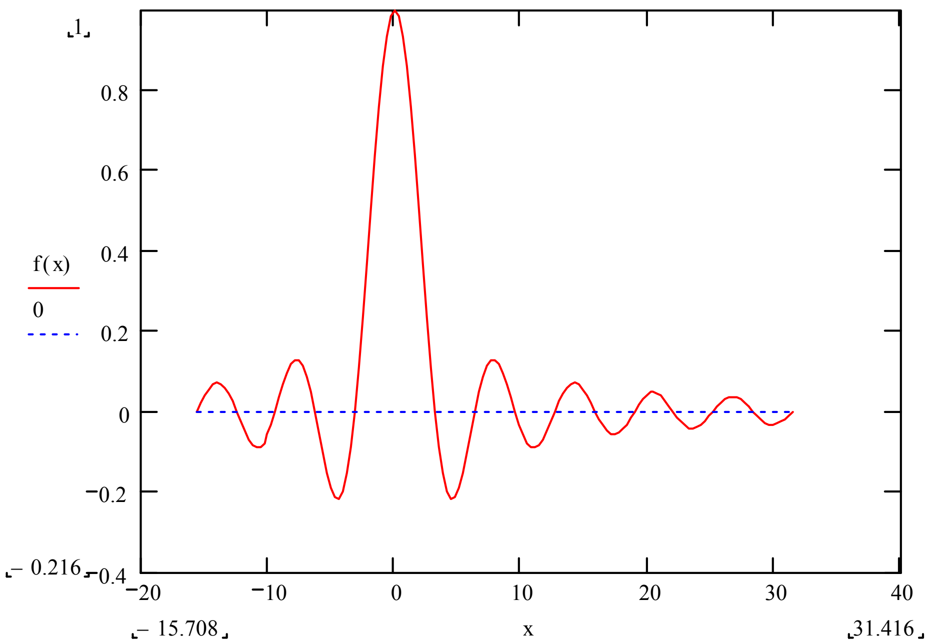
Esquema 1

- Calcular las asíntotas:

  1. Verticales: rectas de ecuación x = a que cumplen $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$,
  2. Horizontales: rectas de ecuación y = b que cumplen $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.
  3. Oblicuas: rectas de ecuación y = mx+n que cumplen:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)).$$

La gráfica de una función puede cortar una infinidad de veces a sus asíntotas horizontales u oblicuas.



Segunda etapa:

Calcular f ', sus raíces, sus discontinuidades y los puntos donde la función cambia de tramos (x_0, x_1, ...,x_n). Hacer un esquema de monotonía (crecimiento y decrecimiento) indicando los extremos relativos (máximos y mínimos). Ver Esquema 2.

f ' ≥ 0 ⇒ f crece (escribiremos ↗).

f ' ≤ 0 ⇒ f decrece (escribiremos ↘).

f ' = 0, ó no existe ⇒ posible extremo relativo (cambio de monotonía).

signo f '		+		-		-		+		+	
monotonía	x_0	↗	x_1 *Máx*	↘	x_2	↘	x_3 *Mín*	↗	x_4	↗	x_5

Esquema 2

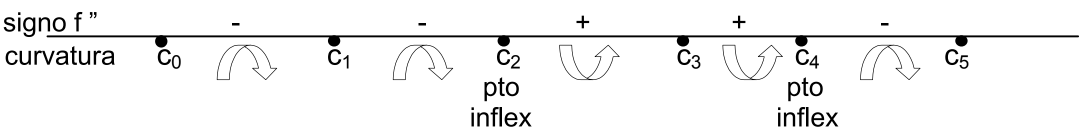
Tercera etapa:

Calcular f ’’, sus raíces, sus discontinuidades y los puntos donde la función cambia de tramos (c_0, c_1, ...,c_n). Hacer un esquema de curvatura (concavidad y convexidad) indicando los puntos de inflexión. Ver Esquema 3.

f ” $\geq 0 \Rightarrow$ f cóncava (escribiremos)

f ” $\leq 0 \Rightarrow$ f convexa (escribiremos)

f ” = 0, ó no existe $\Rightarrow$ posible punto de inflexión (cambio de curvatura)



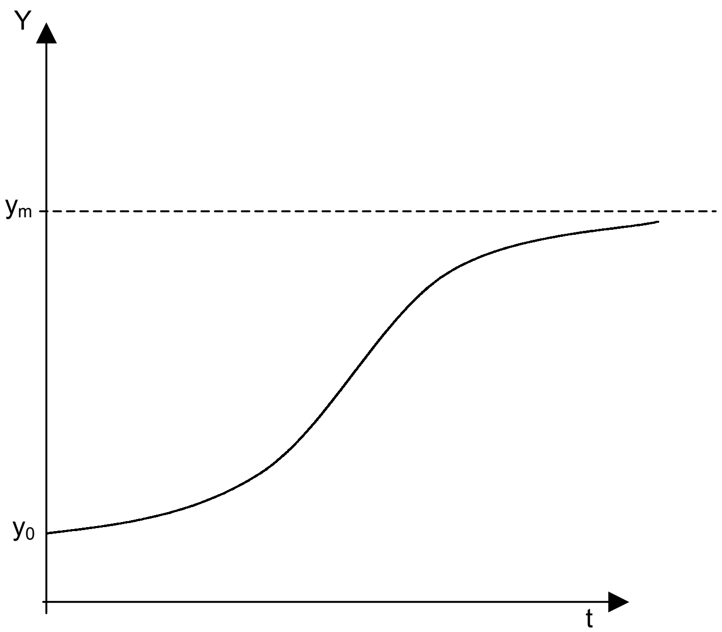
Esquema 3

Estudio de la función logística en el crecimiento de poblaciones.

Cuando el hábitat impone limitaciones sobre el crecimiento de poblaciones, éste no puede continuar indefinidamente, pues es evidente que en la naturaleza todos los procesos son finitos. Es decir, a la larga, el tamaño de la población se estabilizará. La función que más se usa con el propósito de modelar un crecimiento restringido de este tipo se denomina modelo logístico. Este se basa en la suposición de que el tamaño de la población está dado por la siguiente función:

$$y = \frac{y_m}{1 + ce^{-kt}}$$

en donde también está presente la función exponencial con exponente negativo. Aquí y es el tamaño de la población en el instante t, y y_m, c y k son tres constantes positivas. Una gráfica típica de esta función logística es:



Nótese que cuando t se hace muy grande, e^{-kt} se hace muy pequeño, de modo que el denominador de la función se acerca cada vez más a 1. Por tanto, y tiende a y_m a medida que t crece. Esto se hace evidente al observar la gráfica de la función, la cual se estabiliza y se aproxima a la línea horizontal y = Ym al tender t al infinito.

Cuando t = 0, el valor de y se denota por y_0. Sustituyendo t = 0 en la función, tendremos que:

$$y_0 = \frac{y_m}{1+ce^{-k\bullet 0}} = \frac{y_m}{1+c}$$

Si el valor inicial y_0 de y es mucho más pequeño que y_m el tamaño de la población presenta un período de crecimiento para pequeños valores de t que aproximadamente es exponencial. Después, sin embargo, el crecimiento se suaviza y por último se estabiliza, acercándose a y_m cuanto t se hace muy grande.

La ecuación logística se utiliza en muchas situaciones aparte del crecimiento de poblaciones. Las propiedades cualitativas esenciales de la función logística son que para valores pequeños de t recuerda la función exponencial, mientras que en el caso de valores grandes de t se estabiliza aproximándose cada vez más a cierto límite. Estas características son comunes a varios fenómenos y explican la amplia aplicación de esta f unción.

Otro ejemplo de la aplicación de estas funciones aparece en la difusión de la información a través de una población. Digamos que la información sea un fragmento de una noticia, un rumor o el conocimiento de un nuevo producto que acaba de lanzarse al mercado. Si P representa la proporción de la población que está enterada de la información, para valores pequeños de t, P es pequeña, y por lo regular crece en forma exponencial. Sin embargo, P no puede exceder de 1 y a medida que t se hace más grande, P se aproxima cada vez más a este valor, cuando la información se difunde a través de la población entera. Usando la ecuación logística, modelaríamos P por medio de la expresión:

$$P = \frac{1}{1+ce^{-kt}}$$

Un ejemplo concreto sería el siguiente:

Al tiempo t = 0, el 10% de todos los internautas han oído algo acerca del inminente colapso financiero de una gran aerolínea. Dos horas más tarde, el 25% de ellos lo han oído. Veamos como quedaría la fórmula:

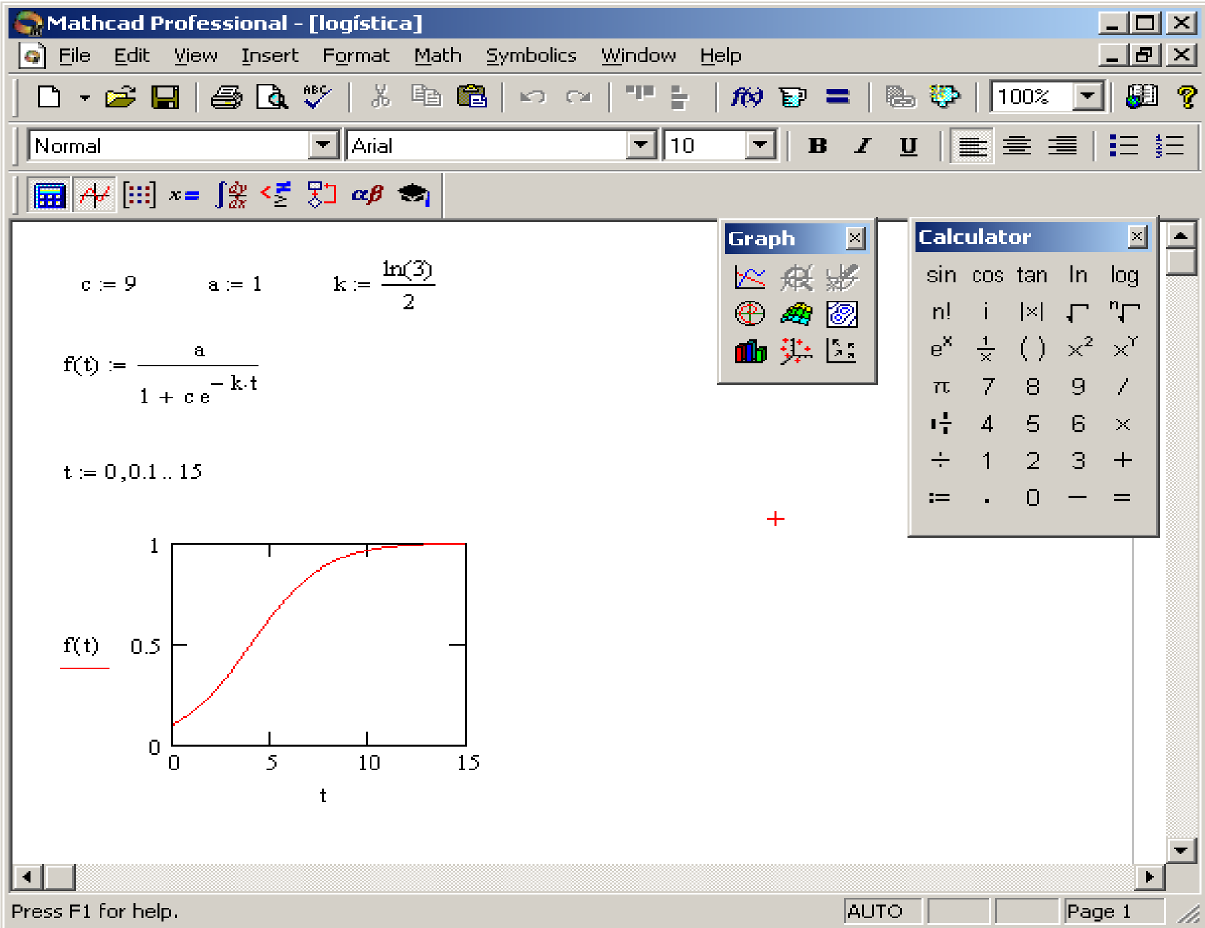
Si $t = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{1+ce^{-k0}} = \frac{1}{1+c} = 0.1 \Rightarrow 1+c = 10 \Rightarrow c = 9$

$$t = 2 \Rightarrow P = \frac{1}{1+9e^{-k2}} = 0.25 \Rightarrow 1+9e^{-2k} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-2k} = \frac{1}{3} \Rightarrow -2k = Ln(1/3) \Rightarrow k = \frac{1}{2}Ln3$$

$$P = f(t) = \frac{1}{1+9e^{-\frac{Ln3}{2}\bullet t}}$$

La gráfica, con la ayuda del Mathcad, quedaría:


Mathcad Professional - [logística]
File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help
Normal
Arial
10
100%
Graph
Calculator
c := 9 a := 1 k := ln(3)/2
f(t) := a / (1 + c e^(− k·t))
t := 0,0.1 .. 15
f(t)
t
Press F1 for help.
AUTO
Page 1

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

1. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+x+2}{x+2} & si\, x<0\\ e^{3x} & si\, x\geq 0\end{cases}$$

Estudiarla y representarla con el Mathcad.

Evidentemente, f no es par, impar ni periódica.

Primera etapa:

- Regiones de f

$Domf = R-\{2\}$. Pues en el primer tramo (x<0) tenemos una función racional cuyo denominador se anula en –2<0 (x+2 = 0). En el segundo tramo no tenemos ningún problema pues la función exponencial e^{3x} está definida en todo R.

Luego tenemos una **discontinuidad** y una asíntota vertical en x = -2.

Para calcular las **raíces** analizamos las funciones de cada tramo por separado (las igualamos a cero).

$-x^2+x+2=0$, que tiene por soluciones x = 2 y x = -1
e^{3x} > 0 la función exponencial no se anula nunca (siempre es estrictamente positiva).

Sólo nos quedamos con aquellos puntos que pertenecen al dominio del primer trozo. Es decir, sólo nos quedamos con x = -1. Este punto será el único punto de corte con el eje x.

Esquema de las regiones:

			$f(-1.5)=\frac{-1.75}{0.5}=-3.5$				
signo f	+				+		+
	$f(-3)=\frac{-10}{-1}=10$	**-2**	-	**-1**	$f(-0.5)=\frac{1.25}{1.5}=0.83$	**0**	$f(1)=e^3=19.9$

- Asíntotas

Ya hemos visto que hay **una asíntota vertical** en x = -2. En efecto, para x = -2, la función no está definida y diverge hacia $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{-x^2+x+2}{x+2}=\frac{-2^2-2+2}{0^-}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{-x^2+x+2}{x+2}=\frac{-2^2-2+2}{0^+}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

Entonces tenemos una asíntota vertical de fórmula: x = -2.

Por otro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+x+2}{x+2} = +\infty$$

por tanto **no hay asíntotas horizontales**.

Veamos que hay, también, una asíntota oblicua de fórmula y = -x+3:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+x+2}{x^2+2x} = -1 \Rightarrow m = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+x+2}{x+2} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{x+2} = 3 \Rightarrow n = 3$$

<u>Segunda etapa:</u>

- Calculo de f'

Si x<0

$$f(x) = \frac{-x^2+x+2}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-2x+1)\cdot(x+2)-(-x^2+x+2)\cdot 1}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2-4x+x+2+x^2-x-2}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x}{(x+2)^2} = \frac{-x(x+4)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Si x>0 $f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3e^{3x} > 0 \quad \forall x \in R$

- Esquema de monotonía

Para determinar las regiones de crecimiento y decrecimiento tomaremos como referencia los siguientes puntos: puntos donde la función cambia de tramo (x = 0); puntos donde la función derivada no está definida (x = -2); puntos donde la derivada se anula (x = -4, x = 0). para determinar el crecimiento y decrecimiento, seleccionamos un punto de cada subintervalo y evaluamos el signo de la primera derivada:

signo f '	*f'(-5)<0*		*f'(-3)>0*		*f'(-1)>0*		*f'(1)>0*
monotonía	↘	**-4** Mín.	↗	**-2**	↗	**0**	↗

Intervalo	punto	Derivada	Monotonía
(-∞, -4)	-5	*f'(-5)<0*	Decrecimiento
(-4, -2)	-3	*f'(-3)>0*	Creciente
(-2,0)	-1	*f'(-1)>0*	Creciente
(0,+ ∞)	1	*f'(1)>0*	Creciente

Tercera etapa:

- Calculo de *f"*

Si x<0

$$f'(x)=\frac{-x^2-4x}{(x+2)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{(-2x-4)\cdot(x+2)^2-(-x^2-4x)\cdot 2\cdot(x+2)}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{(-2x-4)\cdot(x+2)-(-x^2-4x)\cdot 2}{(x+2)^4}=\frac{-2x^2-8x-8+2x^2+8x}{(x+2)^3}=\frac{-8}{(x+2)^3}$$

Si x>0 $f'(x)=3e^{3x}\Rightarrow f''(x)=9e^{3x}>0\quad\forall x\in R$

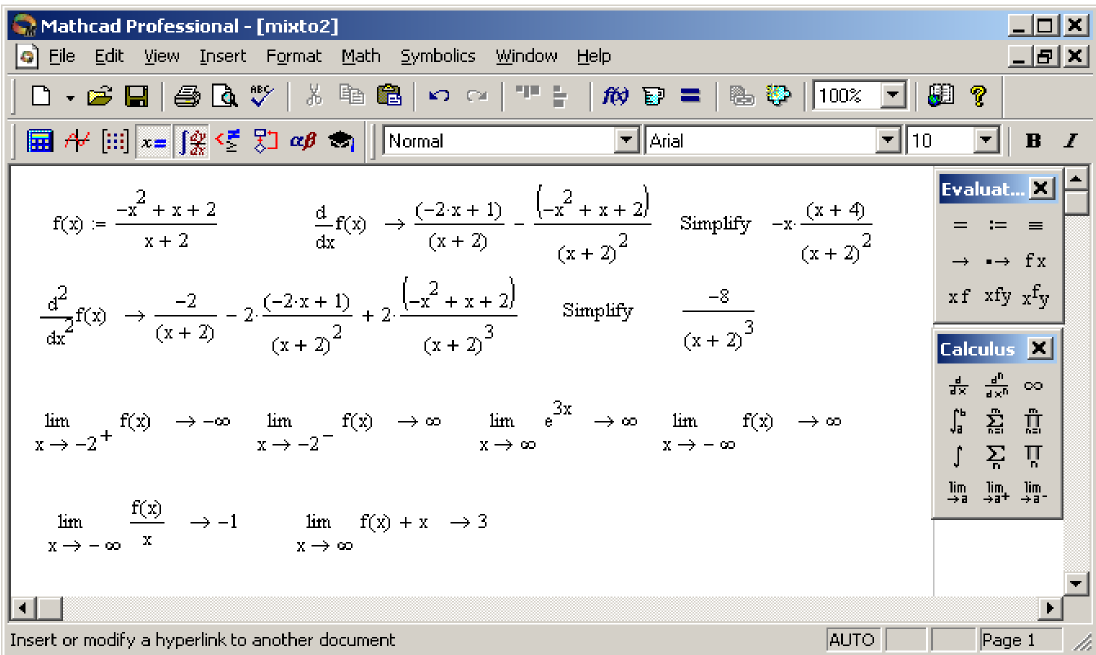
- Esquema de curvatura

Para determinar las regiones de concavidad y convexidad tomaremos como referencia los siguientes puntos: puntos donde la función cambia de tramo (x = 0); puntos donde la función derivada segunda no está definida (x = -2); puntos donde la derivada se anula (ninguno). Para determinar la concavidad y convexidad, seleccionamos un punto de cada subintervalo y evaluamos el signo de la segunda derivada:

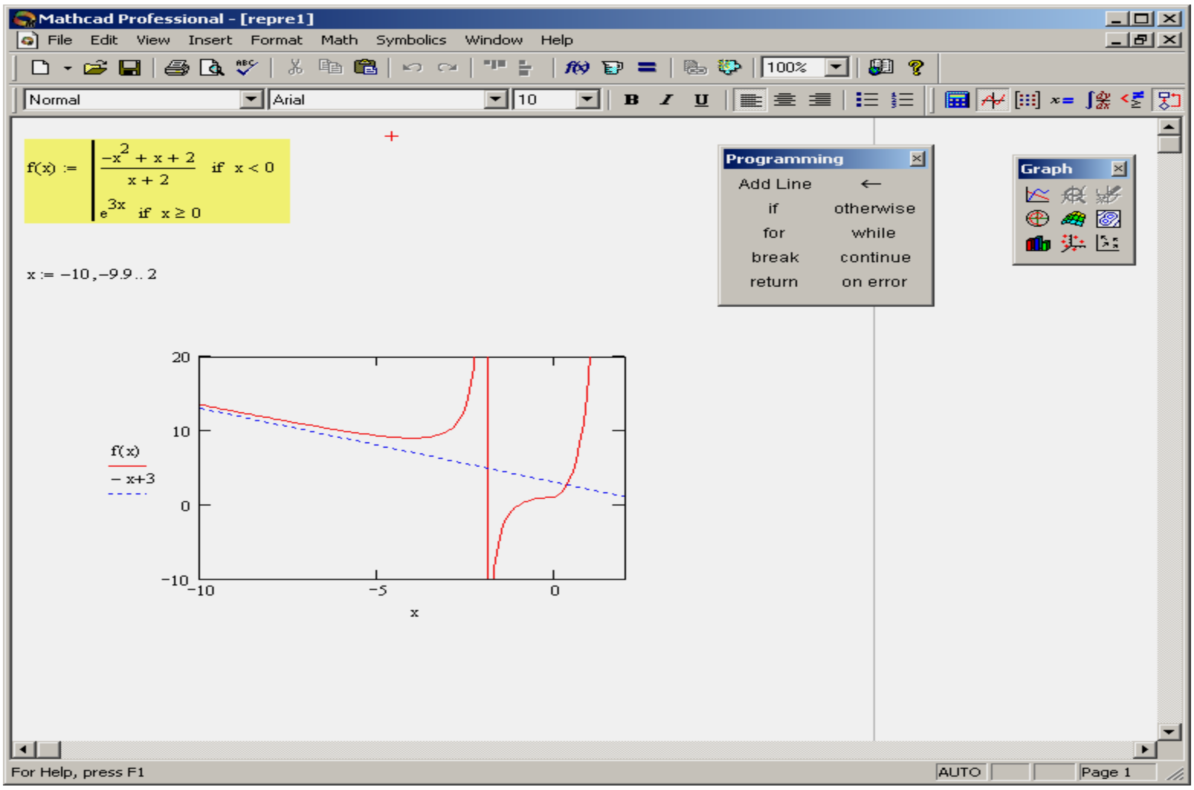
signo f "	f " (-3)>0		f " (-1)<0		f " (1)>0
curvatura		**-2**		***0*** Pto Inflex	

Notar que x = -2 no es un punto de inflexión, pues en –2 la función no está definida.

Se podrían haber hecho los límites y las derivadas con Mathcad.



La gráfica, con la ayuda de Mathcad, quedaría así:



2. Encontrad los extremos relativos, los puntos de inflexión y las asíntotas de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$ y representadla.

En primer lugar estudiaremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función así como los máximos y mínimos. Calculemos la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}\right)=\frac{3x^2(x+1)^2-x^3 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{x^2(3(x+1)-2x)}{(x+1)^3}=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

A partir del signo de la primera derivada podemos afirmar que la función crece en los intervalos $(-\infty,-3)$ y $(-1,\infty)$ mientras que decrece en $(-3,-1)$. Esta expresión se anula solamente cuando $x=0$ y cuando $x=-3$. Calculemos las derivadas segundas en estos puntos notables:

$$f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}\right)=\frac{\left(2x(x+3)+x^2\right)(x+1)^3-x^2(x+3)3(x+1)^2}{(x+1)^6}=$$

$$=\frac{\left(3x^2+6x\right)(x+1)-x^2(x+3)3}{(x+1)^4}=3x\frac{x^2+3x+2-x^2-3x}{(x+1)^4}=6\frac{x}{(x+1)^4}$$

Entonces tenemos que $f''(x=-3)=\dfrac{-18}{16}<0$ y $f''(x=0)=0$. Con el primer resultado podemos afirmar que en $x=-3$ la función presenta un máximo: $(x,y)=\left(-3,-\dfrac{27}{4}\right)$. Hay que calcular las derivadas de orden superior para determinar el tipo de punto notable en $x=0$ aunque basta con fijarse que a la izquierda y a la derecha de dicho punto, la primera derivada es positiva, con lo que se puede afirmar que $x=0$ es un punto de inflexión: $(x,y)=(0,0)$. No obstante, lo verificaremos efectuando el cálculo de la derivada tercera:

$$f'''(x)=\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{6x}{(x+1)^4}\right)=\frac{6(x+1)^4-6x4(x+1)^3}{(x+1)^8}=6\frac{1-3x}{(x+1)^5}$$

Y como $f'''(x=0)=6\neq 0$ tenemos en $x=0$ un punto de inflexión (con tangente plana puesto que $f'(x=0)=0$). La función es creciente en $x=0$ debido a que la tercera derivada es positiva.

A partir del signo de la segunda derivada —positiva a la derecha del eje y, y negativa a su izquierda— también podemos afirmar que en $x=0$ tenemos un punto de inflexión. A la derecha de cero, la función es cóncava mientras que a la izquierda es convexa.

Para estudiar el comportamiento asintótico nos preguntamos si hay puntos de la recta real donde la función diverge (no está definida). En efecto, para $x=-1$, la función no está definida y diverge hacia $-\infty$ por ambos lados:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(0^-)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(0^+)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Entonces tenemos una asíntota vertical de fórmula: $x=-1$.

Para discernir si existen asíntotas oblicuas, calcularemos el límite de la función dividida por x para $x\to+\infty$ y para $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3}{(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2}=+1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^3}{(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2}=+1$$

En ambos casos, los límites existen y valen $+1$. Así pues tenemos asíntotas oblicuas con pendientes positivas e iguales a $+1$. Calculemos la ordenada en el origen de cada asíntota:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2-x}{(x+1)^2}=-2$$

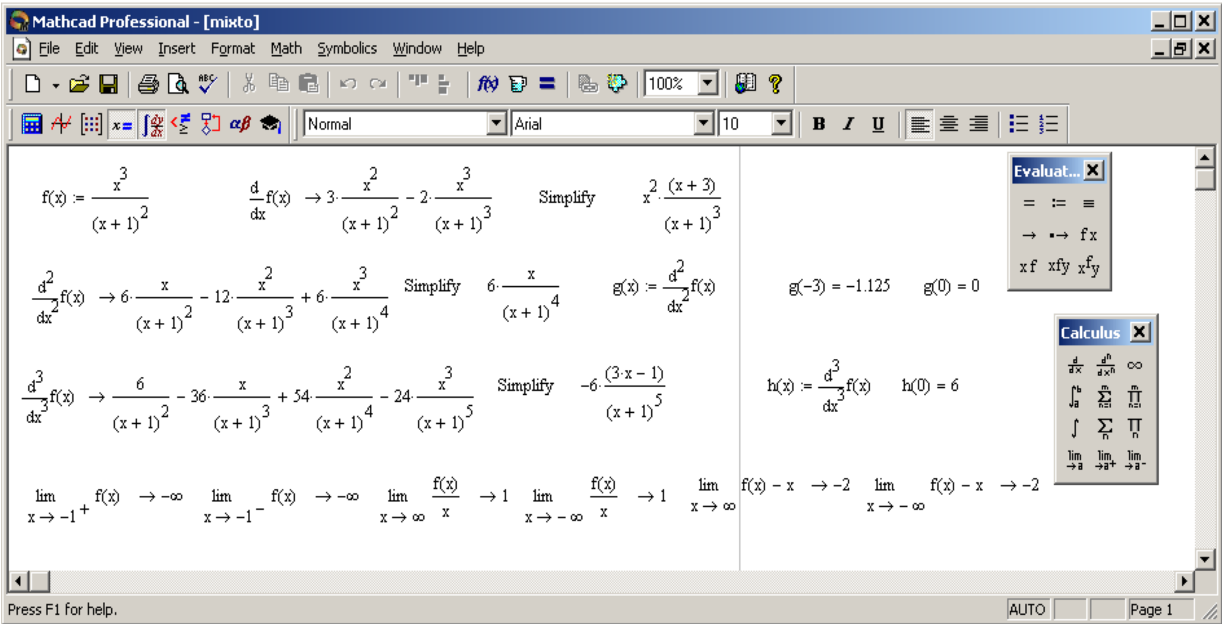
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-x}{(x+1)^2}=-2$$

Cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ la curva se aproxima a $y = x - 2$, que es la única asíntota oblicua de la función.

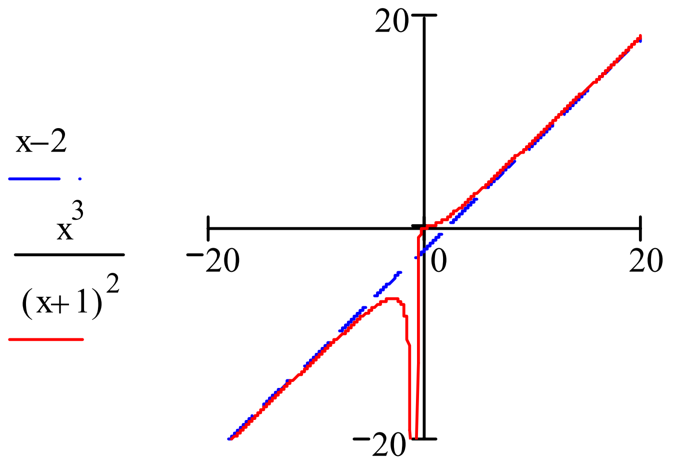
Por último, hacemos la tabla resumen:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
y	-, negativa	$-27/4$ Máximo	-, negativa	Asíntota vertical	-, negativa	0	+, positiva
y'	+, crece	0	-, decrece		+, crece	0	+, crece
y''	-, convexa	$-9/32$	-, convexa		-, convexa	Punto de inflexión	+, cóncava

Todos los cálculos se hubieran podido haber hecho con el Mathcad:



Que nos permitirá construir con Mathcad la gráfica de la función (en rojo) junto con su asíntota oblicua (en azul):



3. Dada la función h(x) = x sin(1/x), se pide:

a) Represéntala gráficamente en el intervalo [-5,5].

b) Según el gráfico, ¿cuánto parece valer el límite de h(x) conforme x tiende a infinito? Compruébalo numéricamente (con Mathcad)

c) Según el gráfico, ¿cuánto parece valer el límite de h(x) conforme x tiende a 0? (realiza un “zoom” para obtener una mejor visualización de la función). Evalúa la función h(x) en unos cuantos valores cercanos a 0 para contrastar tu respuesta anterior.

d) Intenta usar Mathcad para evaluar h(0). ¿Qué ocurre? ¿Es h(x) continua en x = 0? (compruébalo manualmente).

Veamos como podemos hacerlo con las plantillas que lleva incorporadas el Mathcad.

a)

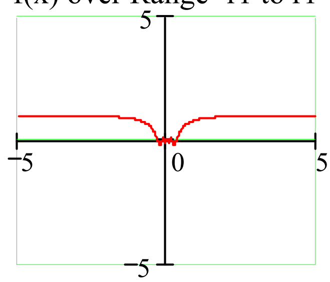
GRAFICA DE UNA FUNCIÓN

Quick X-Y Plot of a Function

Función : $f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Escala: $r1 := 5$

Nota: En este ejemplo la función se ha dibujado para valores comprendiddos entre $-r1 \le x \le r1,\ -r1 \le y \le r1$

f(x) over Range -r1 to r1



b) Gráficamente parece que cuando x tiende a infinito la función tiende a un número de forma asintótica, es decir, parece que haya una asíntota horizontal a la cual se aproxima cada vez más la función.

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 1$$

c) Gráficamente se ve que el límite de h(x) conforme x tiende a 0 es también cero. Para ello se puede utilizar la herramienta del zoom o la plantilla de mathcad anterior dando como escala un valor cercano a cero, por ejemplo 0.1.

GRAFICA DE UNA FUNCIÓN

Quick X-Y Plot of a Function

Introduce la función f(x) que quieres dibujar:

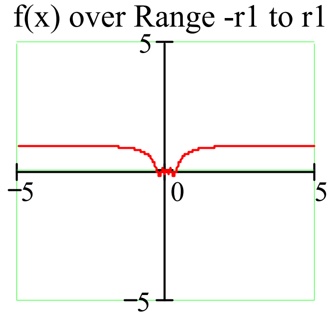
$$f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Escalas:

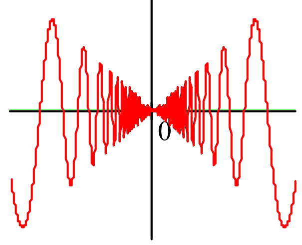
$r1 := 5$ $\qquad$ $r2 := 0.1$

Nota: En este ejemplo la función se dibujará en el rectángulo $-r1 \le x \le r1$, $-r1 \le y \le r1$ y en el rectángulo $-r2 \le x \le r2$, $-r2 \le y \le r2$.

f(x) over Range -r1 to r1



f(x) over Range -r2 to r2



CALCULUS & DIFFERENTIAL EQUATIONS

Límite de una Función en un Punto

Función f(x): $f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Punto en el cual queremos calcular el límite: $p := 0$

$$\lim_{x \to p^-} f(x) \to 0$$

$$\lim_{x \to p^+} f(x) \to 0$$

Límite Bidireccional: $\lim_{x \to p} f(x) \to 0$

d) $f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(0) = \blacksquare$

Te da un mensaje diciendo que puedes estar dividiendo por cero, como es el caso.

La fución no es continua en cero al no estar definida en dicho punto.

Recopilando toda la información que tenemos, la discontinuidad es evitable al coincidir los límites laterales. Se podría evitar la discontinuidad redefiniendo la función como: $f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ para valores de x distintos de cero y como f(0)=0 para x=0

BIBLIOGRAFÍA

[1] Benker, H. (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc.

[2] Moreno, J.A.; Ser, D. (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A.

[3] Agulió, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1991): "Temes clau de càlcul". Barcelona: UPC.

[4] Courant, R.; John, F. (1971): "Introducción al cálculo y al análisis matemático". México: Limusa.

[5] Vaquero, A.; Fernández, C. (1987): "La Informática Aplicada a la Enseñanza". Eudema S.A. Madrid.P 37.

[6] Ortega J. (1990): "Introducció a l'anàlisi matemática". Barcelona: Publicacions de la Universitat Autónoma de Barcelona.

[7] Tang, S. (1986): "Applied Calculus". PWS Publishers.

[8] Burbulla, D.(1993): "Self-Tutor for Computer Calculus Using Maple". Prentice Hall.

[9] Hunt, R. (1994): "Calculus". Ed. Harper Collins.

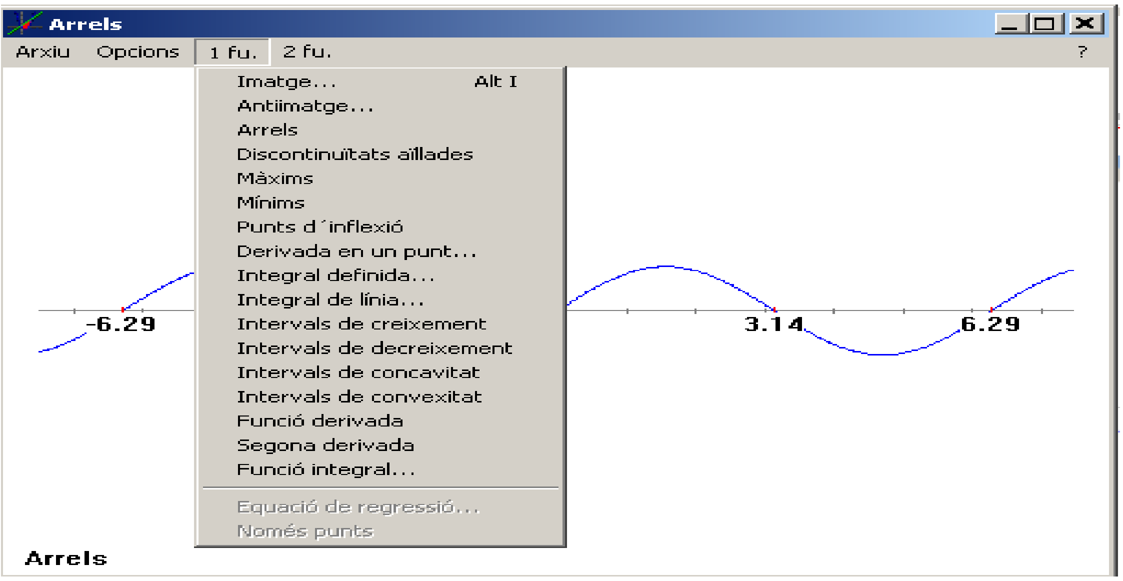
ENLACES

[W1] http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0295-01/ed99-0295-01.html

Página web donde se estudia con todo detalle las funciones y como se representan. Aparecen todos los pasos a seguir para hacer la gráfica de una función.

[W2] http://www.xtec.es/~jlagares/manualwinfun.cat/estractemanualfuncionsperawindows.htm

Página web sobre un articulo, que ganó el segundo premio en el "*concurso de programas educativos para ordenador*" organizado por el M.E.C. el año 1993. Trata sobre un programa, **"funciones para windows"**, con ejemplos gráficos. En particular, representa funciones y las estudia. En catalán. La pantalla del programa nos muestra las posibilidades, para el estudio de las funciones, que tiene. Le introduces una función y, además de representártela, te puede calcular la imagen, antiimagen, raíces, discontinuidades, máximos, mínimos, puntos de inflexión, derivada en un punto, integral definida, integral de línea, intervalos de monotonía y de curvatura, etc. Un programa muy completo, interesante y fácil de manejar para representar y estudiar las funciones.



[W3] http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/25-1-u-derivadas.html

Página web donde se estudia todo lo relacionado con el estudio local de unas funciones.

[W4] http://batllo.informatica.uma.es/matap/svera/temas/t2der1var.pdf

Página web de Salvador Vera Ballesteros, profesor del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad de Málaga. Contiene problemas y apuntes sobre estudio y representación de funciones.

[W5] http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/EsquemaEstudioFunc.htm

Página web que contiene un esquema para estudiar y representar funciones.

[W6] http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/cap_02/cap2_2-1.html

Página web que trata sobre un curso de cálculo diferencial. Este enlace nos lleva al tema de las funciones y su representación gráfica. Hay teoría y ejercicios.

[W7] http://galilei.iespana.es/galilei/mat/graf-func0.htm

Página web con esquema, teoría y ejemplos gráficos para estudiar y representar funciones.

[W8] http://www.uco.es/organiza/departamentos/quimica-fisica/quimica-fisica/CD/CD0.htm

Página web que trata sobre un curso de aprendizaje de Mathcad. Hay ejemplos sobre gráfica de funciones.

[W9] http://www.terra.es/personal/jftjft/Home.htm

Página completa sobre todo lo relacionado con las matemáticas. Aparecen matemáticos famosos y aplicaciones de las matemáticas a diversos campos.