

Matemáticas, *software* y *e-learning*: La experiencia de la UOC con Mathcad

Mar Álvarez, Patrici Molinàs, Cristina Steegmann, Francisco Martínez, Ángel A. Juan
Profesores y Consultores UOC

Como dijo Antonio Vaquero en su libro 'La Informática Aplicada a la Enseñanza', "Enseñar es mucho más que dejar aprender. La enseñanza ha de crear los estímulos que activen y aceleren el aprendizaje."

Resumen

En este artículo se describe una experiencia docente universitaria basada en la utilización del programa Mathcad. Mediante el uso de este *software*, se pretende innovar y mejorar la calidad académica en varias asignaturas de matemáticas que se ofrecen *on-line* en distintas titulaciones de la UOC (Universitat Oberta de Catalunya – La Universidad Virtual). Tras comentar brevemente el modelo de *e-learning* que empleamos y cómo se integra Mathcad en él, nos ocuparemos de analizar las ventajas que este tipo de *software* puede aportar al proceso de aprendizaje en el ámbito de asignaturas matemáticas de marcado carácter técnico y aplicado.

El rol de Mathcad en las asignaturas matemáticas de la UOC

El uso guiado del programa Mathcad es parte integral del currículum académico en varias asignaturas cuantitativas de la UOC. En este sentido, el equipo de profesores y consultores de esta universidad ha venido desarrollando -durante los dos últimos cursos- toda una serie de materiales didácticos en los que la utilización del programa juega un papel relevante. Dichos materiales, que van siendo convenientemente introducidos por los Consultores en las respectivas aulas del Campus Virtual (**Figura 1**), están compuestos por:

1. El **Manual de Introducción al Mathcad**, el cual permite a los estudiantes iniciarse rápidamente en el manejo de las funciones más comunes que ofrece el programa. Se trata, en primer lugar, de proporcionarles los conocimientos básicos necesarios para poder trabajar con ficheros MCD (propios del Mathcad). En el entorno Mathcad deben saber definir los elementos matemáticos más comunes del Álgebra y del Análisis Matemático -tales como las funciones, las matrices, las ecuaciones, etc.- En una segunda etapa, se les ofrece la información necesaria para poder ejecutar un número reducido -pero significativo- de tareas basadas en la evaluación numérica o en la representación gráfica.
2. Las **Guías de Estudio (GES)**, las cuales contienen una enumeración de objetivos y un resumen de los conceptos básicos más importantes del tema, sirviendo al estudiante de referencia y de orientación a la hora de estudiar el material didáctico de la asignatura (compuesto, normalmente, por módulos –en formato papel o digital- editados por la propia universidad). La segunda parte de

estas GES contiene ejercicios tipo resueltos, tanto de forma analítica como con Mathcad. Estos ejercicios prácticos suelen ser un excelente complemento al material didáctico modular (de carácter más teórico). Asimismo, se les propone una selección de ejercicios, a fin de que su realización les permita profundizar en los conceptos trabajados. La resolución en paralelo de los ejercicios tipo -tanto de forma analítica como con el Mathcad- potencia en los estudiantes la capacidad de autocorrección y, en cierta medida, de un autoaprendizaje más amplio, más práctico, más independiente y más próximo al mundo profesional en el que tiempo es caro y la eficiencia fundamental.

3. Las **Pruebas de Evaluación Continua (PECs)**, realizadas por los estudiantes en su propia casa y enviadas al Consultor de la asignatura dentro del plazo preestablecido en el Plan de Trabajo. En las PECs se pide al estudiante que resuelva ejercicios tanto de forma analítica como con ayuda del Mathcad (en función del objetivo que se desee lograr en cada caso). Cuando hablamos de asignaturas cuantitativas, las estadísticas de resultados demuestran que realizar las PECs es la mejor forma de alcanzar los objetivos académicos marcados por el profesorado.

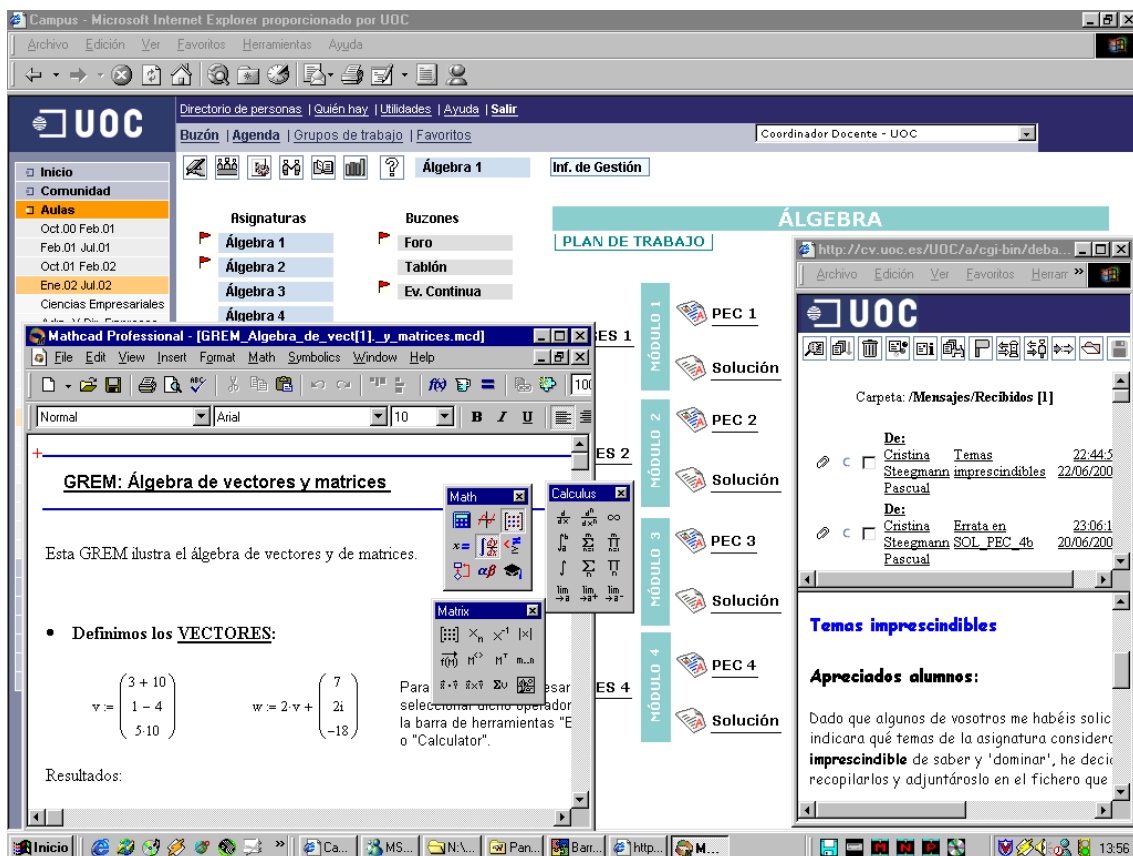


Figura 1: Mathcad en el Aula Virtual de Álgebra

La finalidad de todo esta inversión de recursos materiales y humanos no es otra que la de facilitar el aprendizaje de conceptos y métodos matemáticos, sin por ello perder el

rigor y la riqueza de matices que toda asignatura cuantitativa debe tener. A fin de superar posibles dificultades en el aprendizaje y manejo del Mathcad, también se ha ofrecido —como prueba piloto— la posibilidad de efectuar encuentros virtuales síncronos en los que el consultor resuelve las dudas y guía al grupo de estudiantes. Cada estudiante dispone de las indicaciones del consultor en tiempo real mientras ejecuta instrucciones en Mathcad y plantea sus dudas al grupo. Esta posibilidad permite que el esfuerzo de utilizar Mathcad por vez primera se reduzca para muchos estudiantes a tomar parte activa en un encuentro virtual o a reproducir -a partir de la lectura del diálogo grabado durante la sesión *on-line* y seguidamente publicado en el aula virtual-, los pasos a seguir.

Características destacables de Mathcad

Mathcad permite realizar, en un entorno amigable y visual, tanto cálculo numérico como simbólico. Esta característica lo hace extremadamente versátil puesto que el estudiante dispone, en un mismo entorno de trabajo, de una herramienta que le permite realizar todo tipo de operaciones numéricas y simbólicas -incluyendo cálculo y optimización con restricciones, representación gráfica en 2 y 3 dimensiones, etc. A modo de ejemplo, tareas tan potencialmente arduas como el cálculo de determinantes con parámetros, el cálculo de derivadas parciales, los desarrollos de Taylor, las búsqueda de valores óptimos, o el cálculo de límites, pueden ser llevadas a cabo con Mathcad con relativa facilidad.

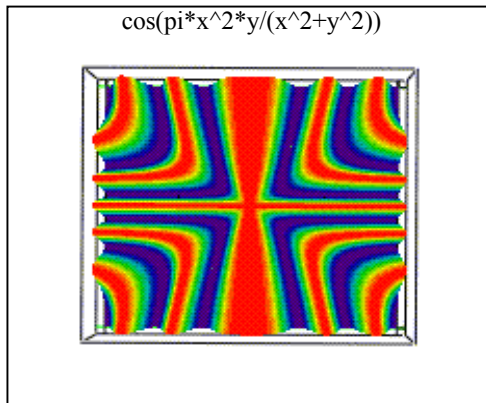
En el aspecto gráfico, las capacidades de edición y de representación en 2D y 3D hacen de Mathcad un programa de sumo interés. Por ejemplo, la representación en 3D junto con la posibilidad de desplazar la figura en los dos grados de libertad angulares –sin más ayuda que la del ratón-, hacen de Mathcad una herramienta excelente para visualizar la forma de las funciones de dos variables (**Figura 2**).

$$F(x, y) := \cos\left(\pi \cdot \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2}\right)$$

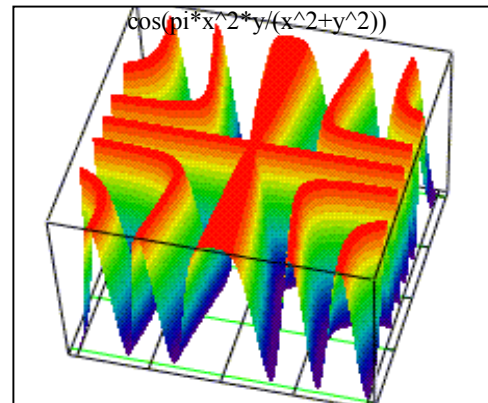
xlow := -10 ylow := -10 xn := 200

xhigh := 10 yhigh := 10 yn := 200

surf := CreateMesh (F, xlow, xhigh, ylow, yhigh, xn, yn)



surf



surf

Figura 2: Representación gráfica con Mathcad de una función de dos variables

Un ejemplo práctico de aplicación

El concepto “eficiencia de un algoritmo” hace referencia al número estimado de operaciones (tanto aritméticas como lógicas) que realizará éste antes de proporcionar un resultado.

Supongamos que, dado un conjunto de n ciudades ($n \geq 3$) y la correspondiente matriz de distancias entre ellas $D = (d_{ij})$, disponemos de dos algoritmos distintos capaces de hallar la trayectoria de mínima distancia que las recorra todas. Nuestro objetivo será determinar cuál de los dos algoritmos es más eficaz, i.e.: para un número dado (muy elevado) de ciudades, cuál de los dos requiere de un tiempo de computación menor para llegar a la solución.

Supondremos que el número de operaciones a realizar depende del número de ciudades (o nodos) n implicadas. Si un algoritmo realiza $4 \cdot n^5$ operaciones antes de dar con el resultado, diremos que tiene una “complejidad” de orden n^5 .

En nuestro caso, sabemos que los dos algoritmos tienen una complejidad de orden $n \cdot \log(n)$ y n^2 respectivamente. Para determinar cuál de los dos es más eficiente (para valores muy grandes del parámetro n), recurriremos al concepto de límite en el infinito. En concreto, podemos analizar el límite entre ambos cocientes:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \log n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \{\text{indeterm.}\} =$$

$$= \{\text{L'Hôpital}\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{\ln 10} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Esto significa que, para valores grandes de n (nº de nodos o ciudades), $n \cdot \log(n) \ll n^2$, con lo que el algoritmo de orden $n \cdot \log(n)$ es mucho más eficiente (requiere de muchas menos operaciones para llegar a la solución).

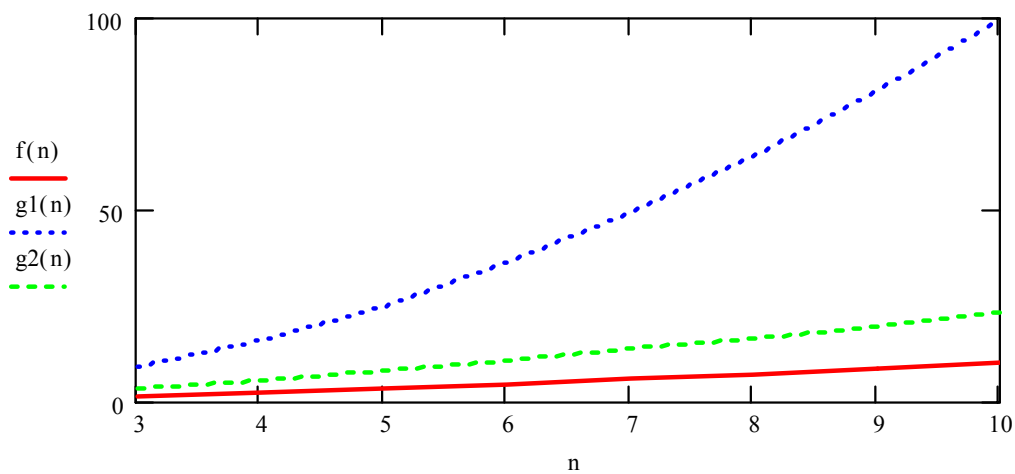
Como se muestra en la **Figura 3**, podemos también recurrir a Mathcad para que nos ayude en el cálculo del límite anterior, en la representación gráfica de las funciones, y en análisis del tipo ¿qué pasaría si ahora logramos rediseñar el algoritmo menos eficiente de forma que su orden de complejidad sea de $n \cdot \ln(n)$?

$$n := 3, 4.. 10 \quad f(n) := n \cdot \log(n)$$

$$g1(n) := n^2 \quad g2(n) := n \cdot \ln(n)$$

$$h1(n) := g1(n) - f(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g1(n)} \rightarrow 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g2(n)} \rightarrow \frac{1}{\ln(10)} \quad h2(n) := g2(n) - f(n)$$



por ejemplo, para $n = 100$ tendríamos: $h1(100) = 9.8 \times 10^3$ $h2(100) = 260.517$

es decir, para $n = 100$ ciudades, habría unas 9800 operaciones de diferencia entre los algoritmos iniciales. Sin embargo, se observa que al mejorar el algoritmo menos eficiente, éste se equipara bastante al más eficiente (ya sólo hay una diferencia de unas 261 operaciones para $n = 100$)

Figura 3: Uso de Mathcad para comparar la eficiencia de varios algoritmos

Mathcad: un valor añadido en la formación matemática universitaria

La experiencia de varios semestres nos hace pensar que la utilización de Mathcad como laboratorio virtual de matemáticas permite mejorar la docencia de las asignaturas cuantitativas universitarias. Esta afirmación se concluye a partir de las siguientes reflexiones:

1. Con Mathcad se consigue una **mejor aproximación a los conceptos matemáticos**. Esto está relacionado con el hecho de que Mathcad permite “liberarse” de ciertos cálculos repetitivos y dedicar más tiempo a reflexionar sobre los conceptos, estudiar más ejemplos, y analizar escenarios del tipo “¿qué pasaría si ...?”. Nuestra aproximación al estudio de las matemáticas con la incorporación de Mathcad supone un acercamiento a las tesis más constructivistas del aprendizaje.
2. Un **desarrollo de currículos más prácticos** y, en consecuencia, más acorde con los estudios en los que se enmarcan nuestras asignaturas (de carácter aplicado o técnico), así como más útil para nuestros estudiantes. En el mundo laboral, disponer de buenas herramientas informáticas es una buena estrategia a la hora de afrontar los problemas reales y buscar soluciones.
3. La inclusión de contenidos que, sin *software*, quedarían como de sólo lectura y, en consecuencia, la **adquisición de una base matemática más completa** y tangible.
4. Una **mayor motivación de los estudiantes** que descubren que son capaces de entender y de utilizar lo aprendido. Los mensajes de valoración que hemos leído van, con mucha frecuencia, en este sentido. Cabe destacar que muchos estudiantes acaban disfrutando con el estudio de las Matemáticas.
5. Añadir, finalmente, que Mathcad es un programa potente del que, en algunos casos, ya han oído hablar. Algunos estudiantes valoran positivamente el simple hecho de aprender a manejar Mathcad y, en algún caso, ya lo utilizan en su trabajo.

Valoración de los estudiantes

En general, y a pesar del posible esfuerzo inicial que les supone, los estudiantes valoran muy positivamente la utilización de Mathcad en las asignaturas de matemáticas. Como muestra de ello, hemos seleccionado los siguientes comentarios representativos de los estudiantes del semestre feb02-jul02:

¿Qué ventajas e inconvenientes has encontrado en el estudio del Análisis con Mathcad?

Iván I.: Inconvenientes ninguno. Las ventajas las resumo en una: aprendizaje más rápido.

Jesús N.: En principio hay alguna dificultad para hacerte con el software, pero cuando lo conoces un poco es muy útil -sobre todo para trabajar, de forma práctica, muchos conceptos que, de otra forma, son muy difíciles de entender.

Luis M.: Te resuelve muchos problemas de cálculo y te ayuda a comprender mejor lo explicado -p.e., cuando visualizas funciones de varias variables.

Comenta los aspectos mejores y peores de tu experiencia con el Mathcad y la asignatura durante este semestre.

Iván S.: Hasta ahora no había estudiado las funciones tan a fondo y, desde luego, sin Mathcad esto no hubiera sido posible.

María Antonia G.: Los peores: me ha llevado muchas horas empezar a manejar el programa, y soy consciente de que aún me quedan muchas cosas que aprender. Los mejores: pienso que el esfuerzo realizado ha merecido la pena y que es un instrumento maravilloso para poner en práctica los conceptos aprendidos o para profundizar en la comprensión de los mismos.

Conclusiones

En definitiva, podríamos concluir que el uso guiado de un *software* adecuado como Mathcad hace la tarea de aprender matemáticas más atractiva y sencilla. Esto permite establecer objetivos más ambiciosos -conceptualmente hablando-, y analizar aplicaciones de las matemáticas que, de otro modo, serían inabordables –bien sea por su dificultad intrínseca o bien por la falta de tiempo suficiente para lograrlo (por la duración del curso académico). Las ventajas de su uso son entonces enormes e innegables.

Agradecimientos

La línea de trabajo aquí indicada se enmarca dentro del proyecto e-Math (Ref.: EA2002-0125), financiado por el Programa de Estudios y Análisis del Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

Bibliografía relacionada:

- ❑ G. J. Porter, D. R. Hill (1996): “Interactive Linear Algebra. A laboratory course using Mathcad”, Springer-Verlag New York, Inc.
- ❑ H. Benker (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc.
- ❑ J. A. Moreno, D. Ser (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A.
- ❑ Antonio Vaquero; Carmen Fernández de Chamigo (1987). La Informática Aplicada a la Enseñanza. Eudema S.A. Madrid.

Enlaces web de interés:

- ❑ Mathsoft Engineering and Education.Inc
<http://www.mathsoft.com>
- ❑ Calculus Animations with Mathcad
<http://www.math.odu.edu/cbii/calcanim/>
- ❑ Interactive Economic Models with Mathcad
<http://appl.wirtschaft.fh-kiel.de/lehre/thiemer/modelzoo.htm>
- ❑ Mathcad Resources
<http://www2.latech.edu/~schroder/mathcd.html>
- ❑ Universitat Oberta de Catalunya – La Universidad Virtual
<http://www.uoc.edu>