

## FIABILIDAD (VIII): ANÁLISIS PROBIT (ÉXITO / FRACASO)

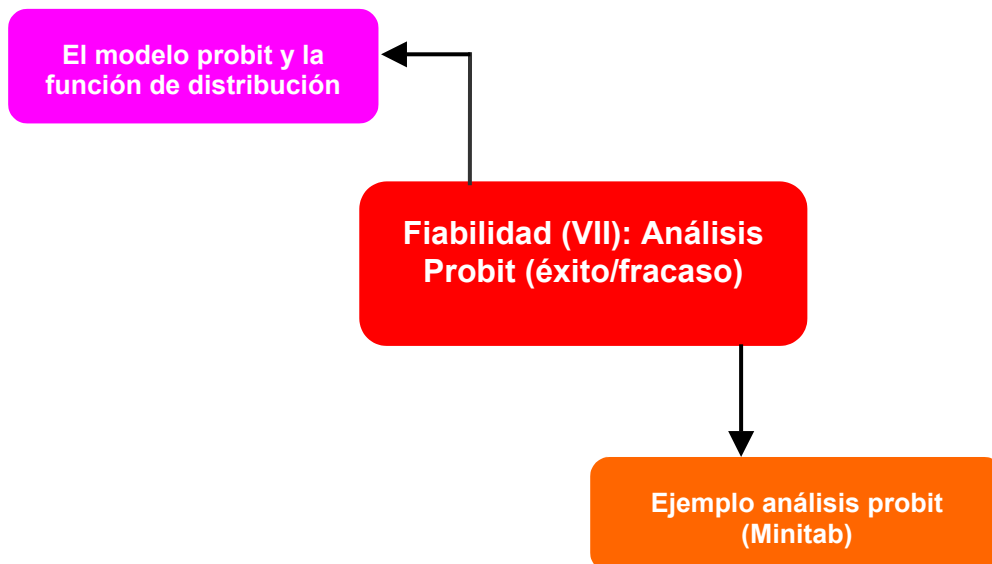
**Autores:** Ángel A. Juan Pérez (ajuanp@uoc.edu), Rafael García Martín (rgarciamart@uoc.edu).

### RELACIÓN CON OTROS MATH-BLOCKS

Este *math-block* forma parte de una serie de 8 documentos relacionados todos ellos con la **Fiabilidad de componentes** desde un punto de vista estadístico:

- Conceptos Básicos (I).
- Identificación y descripción gráfica de los datos (II).
- Análisis paramétrico de los tiempos de fallo (III).
- Análisis no paramétrico de los tiempos de fallo (IV).
- Comparación no paramétrica de muestras (V).
- Tests de vida acelerada (VI).
- Modelos de regresión para observaciones censuradas (VII).
- **Análisis Probit (Éxito / fracaso) (VIII).**

### ESQUEMA DE CONTENIDOS



## INTRODUCCIÓN

Dado un conjunto de dispositivos, realizar con ellos un **análisis probit** consiste en:

- 1) someterlos a condiciones extremas (condiciones de estrés), y
- 2) estudiar la proporción de dispositivos que fallan en tales condiciones.

Observar que, a diferencia de un test de vida acelerada (donde lo que se busca es el tiempo de fallo de una determinada proporción de dispositivos), aquí lo que se pretende es determinar si cada uno de los dispositivos sometidos al análisis ha fallado o no, i.e., se trabajará con variables binarias (éxito o fracaso) en lugar de con tiempos de fallo.

Las aplicaciones de este tipo de análisis son múltiples e interdisciplinarias. Dos ejemplos:

- 1) Supongamos que se pretende analizar el comportamiento del casco de un submarino sometido a distintos niveles de presión. Para realizar dicho análisis, podrían someterse varias planchas metálicas del casco a niveles de presión de distinta magnitud, anotando en cada caso el número de piezas que “sobreviven” (no se resquebrajan) a cada nivel.
- 2) Un estudio similar se podría aplicar para determinar qué niveles de una variable de estrés causarían la muerte a una determinada proporción de organismos vivos. Así, por ejemplo, podría resultar interesante el averiguar qué nivel de contaminación ambiental causaría la muerte al 30% de los peces de un río.

A la hora de registrar los datos (es decir, de contabilizar el número de éxitos y fracasos), suele usarse alguno de los dos formatos equivalentes que se muestran a continuación:

**Formato Éxitos/Pruebas.** En este formato se usan tres columnas, la primera de las cuales contendrá los distintos valores de la variable de estrés. La segunda y tercera columnas contendrán, respectivamente, el número de éxitos (fallos) contabilizados y el número de pruebas asociados a cada valor de la variable de estrés:

Temp.	Éxitos	Pruebas
80	2	10
120	4	10
140	7	10
160	9	10

**Formato Respuesta/Frecuencia.** En este formato también se usan tres columnas: la primera de ellas contendrá los distintos valores de la variable de estrés, la segunda contendrá valores 1 (éxito) y 0 (fracaso), mientras que la tercera contendrá la frecuencia con que aparece cada 1 ó cada 0 para el valor de estrés asociado:

Temp.	respuesta	frec.
80	1	2
80	0	8
120	1	4
120	0	6
140	1	7
140	0	3
160	1	9
160	0	1

En ocasiones puede resultar conveniente usar una variable factor que permita agrupar los dispositivos analizados en diferentes clases o niveles. Así, en el ejemplo anterior de la contaminación, se podrían clasificar los peces en tres niveles según sean jóvenes, adultos, o viejos. De esta forma, el

investigador sabrá si el índice de contaminación afecta de forma especial a alguno de estos niveles o si afecta a todos por igual.

## **EL MODELO PROBIT Y LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN**

---

El modelo probit presupone que se conoce la distribución de la v.a.  $X$  que determina el nivel de estrés (temperatura, voltaje, presión, etc.). Más concretamente, lo que el modelo presupone es que el analista será capaz de ajustar, mediante una distribución teórica, la distribución que sigue la v.a.  $Y$ , la cual es una transformación lineal de  $X$ . Habitualmente, dicha variable  $Y$  seguirá una distribución normal, logística, o de valores extremos. En ocasiones, sin embargo, será mejor ajustar la distribución de  $Z = \log(Y)$  mediante una log-normal, una log-logística, o una Weibull. La distribución que se elija dependerá, obviamente, de los valores observados para la variable de estrés  $X$ , siendo necesario realizar un test de bondad de ajuste para comprobar que el modelo es válido.

El objetivo del análisis será estudiar el efecto causado por los cambios en la variable de estrés  $X$  sobre la probabilidad de éxito  $\pi$  (es decir, sobre la probabilidad de que el dispositivo falle).

La expresión genérica de estos modelos, suponiendo que no hay variables factores, sería la siguiente:

$$\pi = c + (1 - c) \cdot F(\beta_0 + \mathbf{X} \cdot \beta)$$

donde:

- $\pi$  = probabilidad de éxito (i.e., probabilidad de que el dispositivo falle),
- $F(Y)$  = función de distribución de la v.a.  $Y = \beta_0 + \beta \cdot X$ ,
- $\beta_0$  = término constante,
- $X$  = variable de estrés,
- $\beta$  = coeficiente (desconocido) asociado a la variable de estrés,
- $c$  = tasa de fallo natural (proporción de dispositivos que fallan por causas naturales).

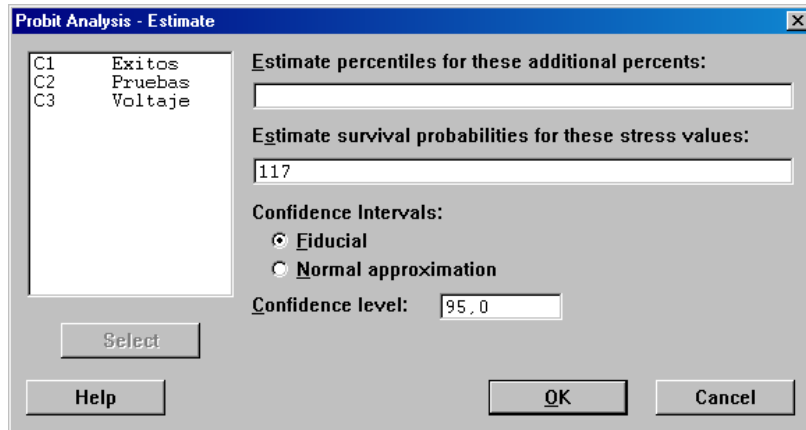
**EJEMPLO DE ANÁLISIS PROBIT CON MINITAB**

**Ejemplo (análisis probit):** Supongamos el caso de una empresa dedicada a la producción de dos clases de tubos fluorescentes, A y B. El objetivo será determinar qué proporción de cada clase de tubos logra superar las 800 horas de funcionamiento si se encuentran sometidos a un voltaje que varía entre 105 y 129 voltios. Para resolver este problema, se ha llevado a cabo el experimento siguiente: para cada combinación voltaje - tipo de tubo posible, se han realizado 50 pruebas, contabilizándose el número de veces que el tubo ha fallado antes de 800 horas (variable “Éxitos”). Los voltajes usados han sido los siguientes: 108, 114, 120, 126, y 132 voltios. Los datos se encuentran en el archivo **Tubos.mtw** :

	C1	C2	C3	C4
	Exitos	Pruebas	Voltaje	TipoTubo
1	2	50	108	A
2	6	50	114	A
3	11	50	120	A
4	27	50	126	A
5	45	50	132	A
6	3	50	108	B
7	8	50	114	B
8	13	50	120	B
	31	50	126	B
	46	50	132	B

**Entrada de datos (input):** se configura la ventana inicial según se indica en la imagen. Se ha supuesto que los datos (en este caso  $Z = \log(Y)$ ) siguen una distribución Weibull. Además, también se ha solicitado un gráfico de probabilidad:

Le pediremos también al programa que estime la probabilidad de supervivencia (o proporción de dispositivos supervivientes) bajo unas condiciones de 117 voltios:



**Salida de datos (output):** El programa proporciona la siguiente información:

Probit Analysis: Exitos; Pruebas versus Voltaje; TipoTubo

Distribution: Weibull

Response Information

Variable	Value	Count
Exitos	Success	192
	Failure	308
Pruebas	Total	500

Factor Information

Factor	Levels	Values
TipoTubo	2	A B

Estimation Method: Maximum Likelihood

Regression Table

Variable	Coef	Standard Error	Z	P
Constant	-97,019	7,673	-12,64	0,000
Voltaje	20,019	1,587	12,61	0,000
TipoTubo				
B	0,1794	0,1598	1,12	0,262
Natural Response	0,000			

Test for equal slopes: Chi-Square = 0,2585; DF = 1; P-Value = 0,611

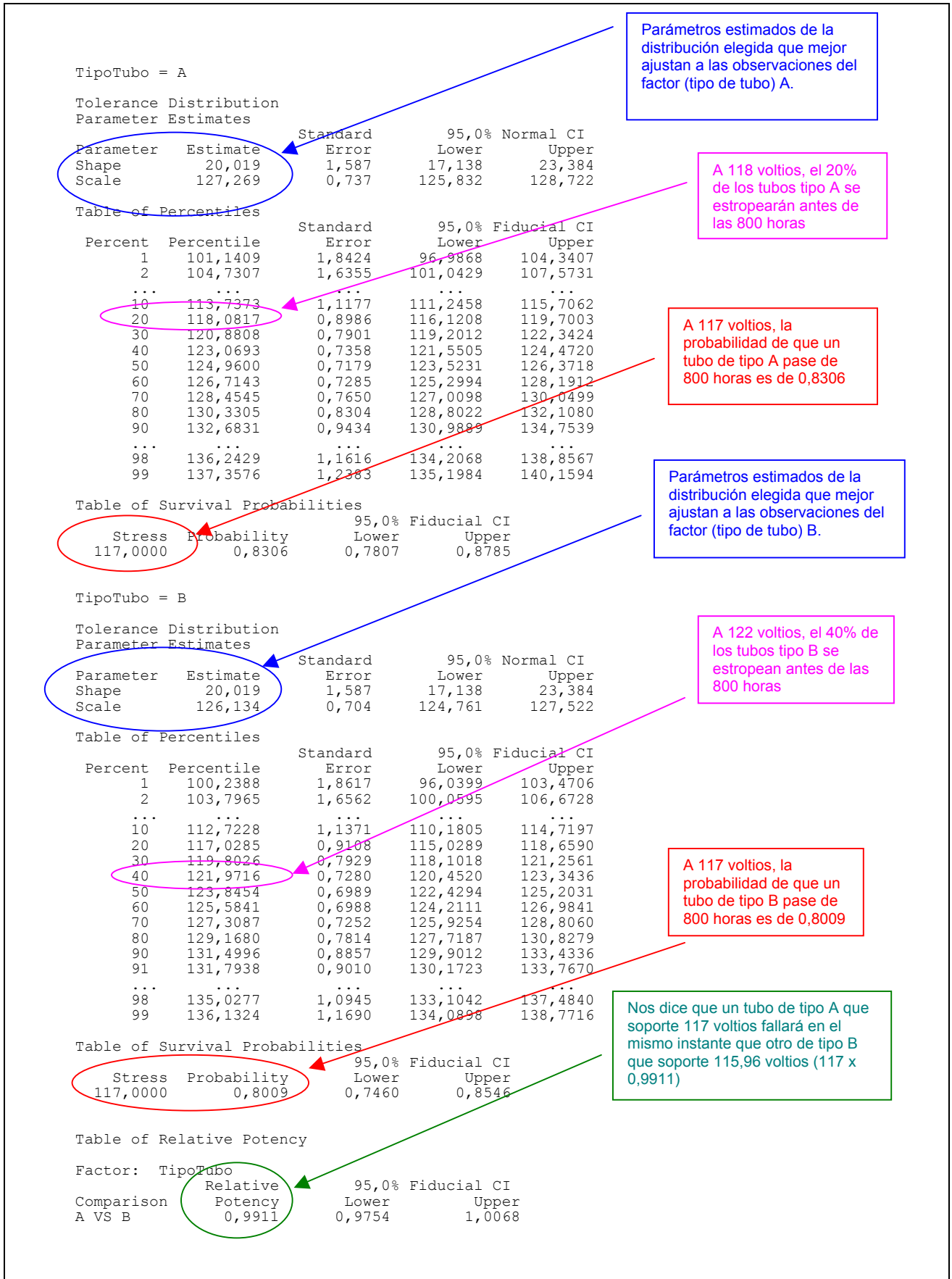
Log-Likelihood = -214,213

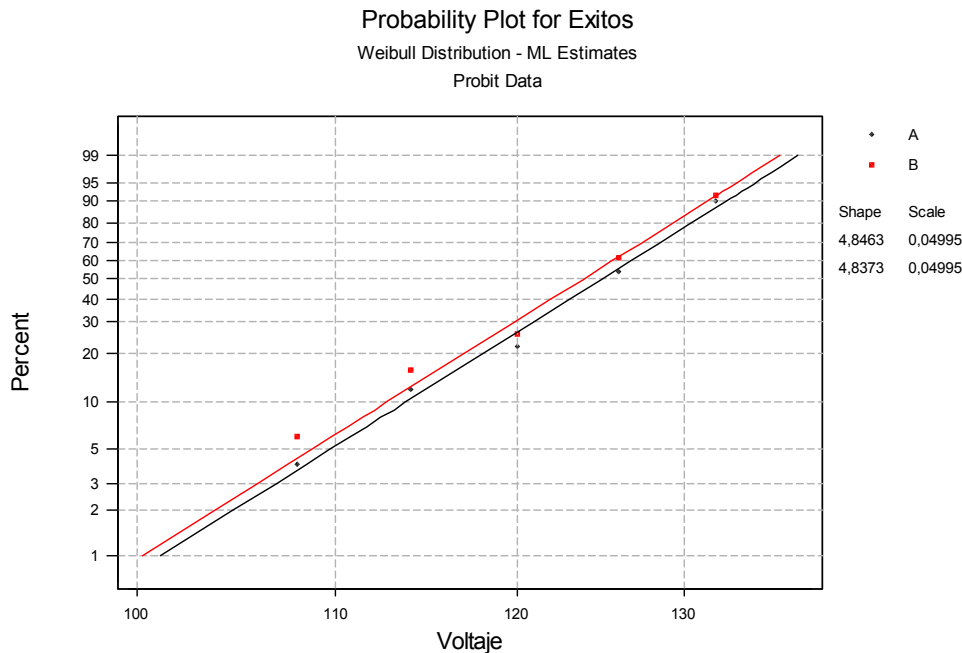
Goodness-of-Fit Tests

Method	Chi-Square	DF	P
Pearson	2,516	7	0,926
Deviance	2,492	7	0,928

**Annotations:**

- Red box:** La tasa de fallo natural es la probabilidad de que una unidad falle por causa natural (no por culpa de la variable independiente). Si su valor fuese mayor que 0, deberíamos pensar que no todos los dispositivos fallan por culpa de la variable independiente.
- Green box:** Estos son los p-valores resultantes de los test cuya hipótesis nula es: "el coeficiente asociado a la variable es cero" (i.e.,  $H_0$  propone que la variable NO influye sobre la probabilidad de que el dispositivo falle).
- Pink box:** P-valor del test con  $H_0$ : "las pendientes asociadas a cada nivel del factor NO son significativamente diferentes".
- Blue box:** P-valores asociados a dos tests para contrastar la bondad del ajuste de la distribución escogida (Weibull en este caso). La hipótesis nula es: "el ajuste es correcto".





Analizando los resultados, se comprueba que tanto los dos tests de bondad de ajuste (con p-valores 0,926 y 0,928) como el gráfico de probabilidad sugieren que la distribución de Weibull se ajusta de forma correcta a los datos.

Además, dado que el test sobre igual pendiente de ambos factores no es significativo (p-valor = 0,611), la comparación entre ambos tipos de tubos no dependerá del voltaje al que estén sometidos. En este caso, los tubos de tipo A no son significativamente diferentes de los del tipo B ya que el coeficiente asociado a este segundo tipo no es significativamente distinto de 0 (p-valor = 0.262).

La **Tabla de Probabilidades de Supervivencia** muestra que, a 117 voltios, el 83% de los tubos de tipo A y el 80% de los del tipo B durarán más de 800 horas.

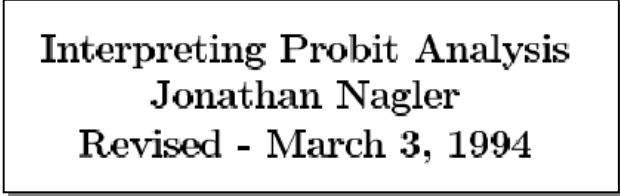
Finalmente, la **Tabla de Percentiles** informa de que, a 124,96 voltios, el 50% de los tubos tipo A no sobrepasarán las 800 horas; para los tubos de tipo B, este 50% de tubos que no logran superar la cifra anterior se alcanzará ya a 123,85 voltios.

## BIBLIOGRAFÍA

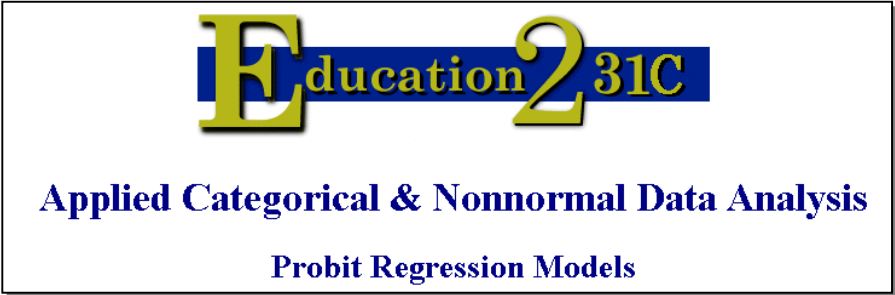
- [1]. Brodsky B., Dharkovsky B. **Nonparametric methods in change-point problems**. Kluwer Academic. 1993.
- [2]. Conover, W. J. **Practical nonparametric statistics**. 2nd edition. USA. Wiley & Sons. 1980.
- [3]. Daniel, W. **Applied Nonparametric Statistics**. 2nd edition. USA. PWS Kent. 1990.
- [4]. Gibbons, J. **Nonparametric Statistical Inference**. 2nd edition. USA. Dekker. 1985.
- [5]. Hajek, J. **A course in nonparametric statistics**. USA. Holden Day. 1969.
- [6]. Hollander, M., D. Wolfe. **Nonparametric Statistical Methods**. USA. John Wiley & Sons.
- [7]. Randles R., D. Wolfe. **Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics**. USA. John Wiley & Sons, 1991.
- [8]. Agresti, A. **Analysis of ordinal categorical data**. USA. John Wiley & Sons. 1984.
- [9]. Finney, D. J. **Probit Analysis**. 3rd edition. USA. Cambridge University Press. 1971.
- [10]. Fraser, D. A. S. **Inference and Linear Models**. USA. McGraw Hill, 1979.
- [11]. McCullagh, P. y J. A. Nelder. **Generalized Linear Models**. USA. Chapman and Hall.

**ENLACES**

- [W1] <http://www.nyu.edu/classes/nagler/quant2/notes/probit1.pdf>  
El siguiente artículo, de Jonathan Nagler, ofrece una rigurosa introducción al análisis PROBIT haciendo un énfasis especial en la interpretación de los resultados.



- [W2] <http://www.gseis.ucla.edu/courses/ed231c/notes3/probit1.html>  
En la página de la UCLA Graduate School of Education puede consultarse el material de un curso sobre análisis PROBIT.



- [W3] [http://www.economia.ucn.cl/paroca2/Clase04/MPProbit\\_files/frame.htm](http://www.economia.ucn.cl/paroca2/Clase04/MPProbit_files/frame.htm)  
En castellano, podemos consultar la página de la Universidad Católica del Norte (Chile) con material relacionado también con este tipo de análisis..

