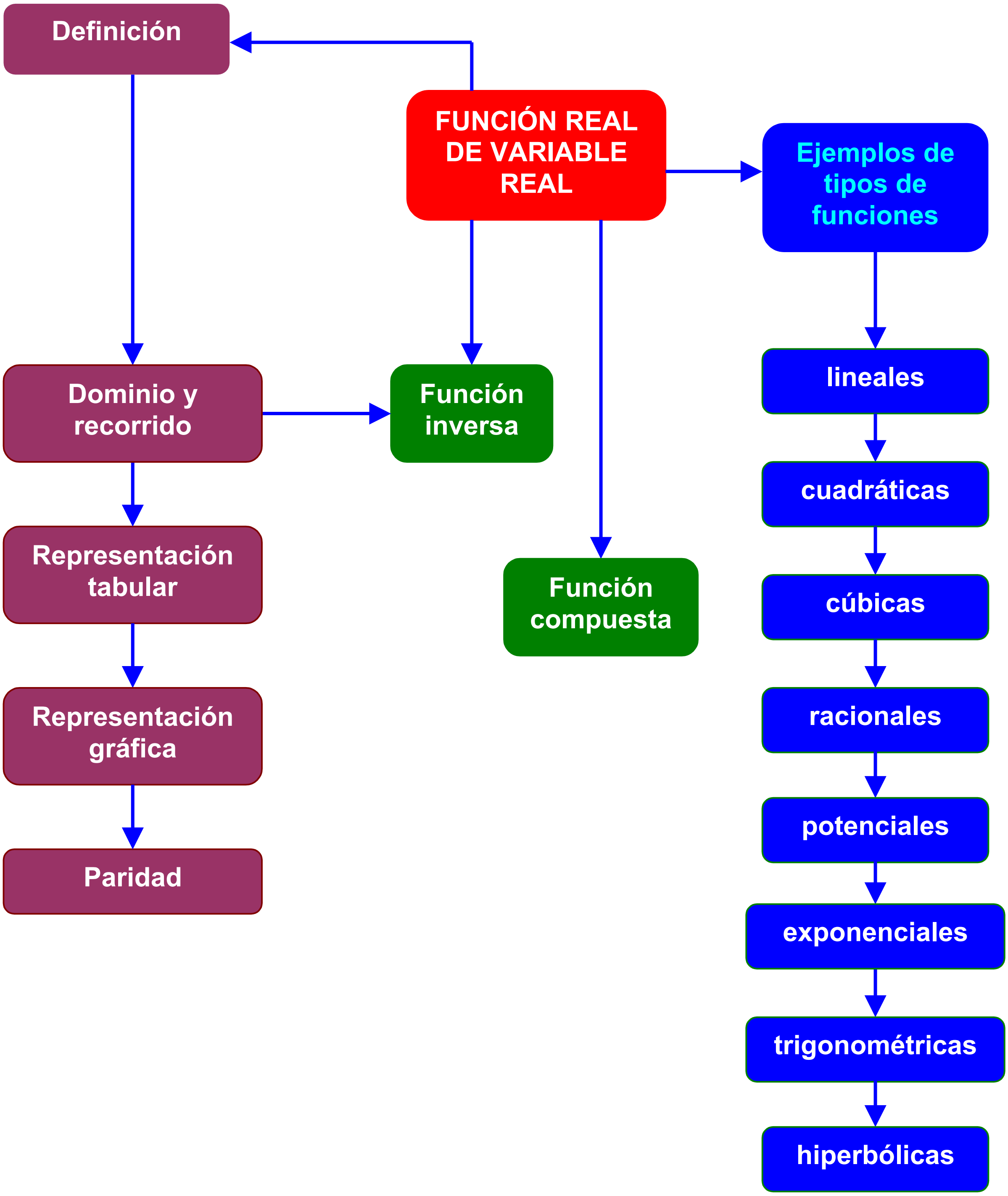
FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Autor: Patrici Molinàs Mata (pmolinas@uoc.edu), José Francisco Martínez Boscá (jmartinezbos@uoc.edu)

ESQUEMA DE CONTENIDOS



Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

INTRODUCCIÓN

Las funciones son las relaciones numéricas entre magnitudes. Por lo tanto en toda disciplina cuantitativa deberemos tratar con funciones que relacionarán las magnitudes de interés. En este Mathblock tratamos sólo de las funciones reales de variable real. En un estudio preliminar como éste, en el que no se presupone ningún contenido previo, es imprescindible empezar introduciendo las funciones con toda su riqueza descriptiva. Es por este motivo que en el presente Mathblock trataremos la representación tabular y gráfica justo después de definir los conceptos de función y, de dominio e imagen de una función. En el apartado de representación gráfica de una función vamos a hacer hincapié en las propiedades de simetría de las funciones puesto que nos permitirán avanzar más rápidamente en los temas de Representación gráfica (sin ordenador) e integración de funciones.

La parte central de este Mathblock está dedicada a la búsqueda de la función inversa de una función cualquiera y a la composición de dos funciones. Veremos como no siempre es posible encontrar la función inversa; a menudo debemos restringir el dominio de la función inversa para que ésta tenga sentido. La composición de funciones que nos permite “encadenar” operaciones con la variable original constituirá la segunda parte del núcleo conceptual de este Mathblock. Finalmente proporcionamos unos cuantos ejemplos de las funciones más populares en la ingeniería.

OBJETIVOS DOCENTES

- Introducir el concepto de función, proporcionar su representación tabular y gráfica. Saber determinar el dominio y el recorrido de una función cualquiera.

- Familiarizarse con los conceptos de función inversa y función compuesta. Desarrollar la agilidad mental suficiente para establecer si la función inversa de una función dada existe y calcularla. Adquirir la práctica necesaria en la composición de funciones.

- Descubrir los tipos de funciones más comúnmente utilizados y potenciar la habilidad para reconocer una dependencia funcional a partir de la gráfica de la función.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable —previamente a la lectura de este Mathblock— el haber desarrollado cierta destreza en el manejo del programa Mathcad.

Por lo tanto, recomendamos que trabajéis el Mathblock: “Uso básico del Mathcad en Análisis (I): cálculo simbólico y analítico” antes de empezar con éste. Después de haber trabajado este Mathblock podéis abordar los de “Límites de funciones”, “Continuidad en una dimensión” y “Derivación de funciones”, así como el de “Funciones de varias variables”.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- ### Definición de función: representación tabular y gráfica

Para cualquier función f —que proporciona un **único** valor de la variable dependiente (y) a partir de un valor de la independiente (x), $y = f(x)$— hemos de conocer las distintas formas de expresarla:

1. expresión algebraica,
2. en forma de tabla de pares de valores o
3. como una gráfica.

Véase el primer ejemplo en “Casos prácticos con software”.

- **Dominio y recorrido de una función**

Asimismo en el segundo ejemplo de “Casos prácticos con software” aprenderemos a averiguar cuál es su **dominio** (Dom f) y su **recorrido o conjunto imagen** (Im f).

El **dominio** consiste en el subconjunto de números reales que puede tomar la variable independiente y el **recorrido**, el subconjunto de valores generados utilizando como variable independiente de la función todos los valores de su dominio.

- **Paridad de una función. Funciones pares e impares. Funciones sin paridad**

Decimos que **una función** $f(x)$ **es par** siempre que para todo valor de la variable independiente perteneciente al dominio se cumpla que:

$$f(-x) = f(x)$$

Esto corresponderá gráficamente a una simetría especular respecto al eje y ($x = 0$).

Decimos que **una función** $f(x)$ **es impar** siempre que para todo valor de la variable independiente perteneciente al dominio se cumpla que:

$$f(-x) = -f(x)$$

Esto corresponderá gráficamente a una simetría respecto al punto $(x, y) = (0,0)$.

El carácter **par** o **impar** de una función es lo que conocemos como su **paridad**. Las funciones que no son ni pares, ni impares, carecen de paridad. Veremos ejemplos de los tres casos en “Casos prácticos con software”.

- **Función inversa**

La función inversa, $f^{-1}(x)$, de una función $f(x)$, se define como aquella función tal que $f^{-1}(y) = x$ siempre que $f(x) = y$. Cabe destacar que el Dom $f^{-1}(x)$ =Im $f(x)$ y que Im $f^{-1}(x)$ = Dom $f(x)$. En particular, si para un mismo valor de $f(x)$ existen dos posibles soluciones x, deberemos restringir el dominio de f para que su inversa esté únivocamente determinada. Dicho de otro modo: sólo cuando la función de partida f sea inyectiva o restringamos su dominio para conseguir inyectividad, entonces podremos definir la función inversa f^{-1}.

Recordemos la definición de función inyectiva. Una función $y = f(x)$ es inyectiva si a dos valores diferentes cualesquiera de x les corresponden imágenes diferentes.

- **Función compuesta**

Forma también parte de este tema saber componer dos o más funciones —mediante la operación de **composición de funciones**: $(fog)(x) = f(g(x))$— y determinar el dominio y el recorrido de la función compuesta. En el caso de componer dos funciones, el dominio de la primera función tiene que limitarse de forma que el conjunto imagen de la primera función (Im $g(x)$) esté incluido dentro del dominio de la segunda (Im $g(x) \subseteq$ Dom $f(x)$).

La composición de cualquier función con su inversa equivale a la función identidad: $i(x) = x$, que hace corresponder a la variable independiente, la misma variable independiente.

- **Funciones lineales, cuadráticas y cúbicas**

El otro objetivo de este tema consiste en familiarizarse con las funciones polinómicas de primer, segundo y tercer grado en x.

Funciones lineales

Las funciones **lineales** son las que se expresan mediante un polinomio de primer grado:

$$f(x) = ax + b$$

donde $a \neq 0$ y b son números fijos que conocemos como coeficientes del polinomio; y su gráfica una recta.

Funciones cuadráticas

Las funciones **cuadráticas** son las que se expresan mediante un polinomio de segundo grado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a \neq 0$, b y c son números fijos que conocemos como coeficientes del polinomio; y su gráfica una parábola cuyo sentido (hacia arriba o hacia abajo) dependerá del signo de a.

Toda función cuadrática puede expresarse de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

basta para ello aplicar la siguiente substitución:

$$p = -\frac{b}{2a} \qquad\qquad q = c - \frac{b^2}{4a}$$

¿Cuál es el sentido geométrico de estas dos variables?
El vértice de la parábola viene dado por el punto (p,q).

¿Y a qué corresponde a?
El valor absoluto del coeficiente a determina si la parábola se encuentra más cerrada o más abierta.

Funciones cúbicas

Las funciones **cúbicas** son las que se expresan mediante un polinomio de segundo grado:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

donde $a \neq 0$, b y c son números fijos que conocemos como coeficientes del polinomio; y su gráfica recibe el nombre de "cúbica".

Resumimos aquí las propiedades geométricas de los tres tipos de funciones que comprobaremos en la parte práctica de este Mathblock:

Fórmula algebraica	**Forma geométrica**	**Cortes con el eje real (eje OX)**	**Evolución de la función cuando *x* avanza de –∞ a +∞**
***y*=a*x*+b (polinomio lineal)**	Recta oblicua si a≠0 Recta horizontal si a=0	1 ninguno (o infinitos si a=b=0)	avanza de –∞ a +∞ si a>0 y de +∞ a –∞ si a<0 mantiene un valor constante b
***y*=a*x*^{2}+b*x*+c (polinomio cuadrático)**	Parábola	2 si b^2-4ac>0 1 si b^2-4ac=0 ninguno si b^2-4ac<0	las "ramas" de la parábola descienden de +∞ para volver a +∞ cuando a>0. Lo mismo sucede con –∞ si a<0
***y*=a*x*^{3}+b*x*^{2}+c*x*+d (polinomio cúbico)**	"Cúbica"	3, 2 o 1	avanza de –∞ a +∞ si a>0 y de +∞ a –∞ si a<0

- **Funciones racionales**

Llamamos función **racional** a toda aquella función que se puede expresar como el cociente de dos polinomios cualesquiera:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0}{q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \ldots + q_1 x + q_0}$$

donde $p_n \neq 0, p_{n-1}, \ldots, p_1, p_0$ y $q_n \neq 0, q_{n-1}, \ldots, q_1, q_0$ son coeficientes reales de los polinomios.

- **Funciones potenciales**

Una función **potencial** viene dada por:

$$f(x) = x^c$$

donde c es un número real cualquiera diferente de cero.

- **Funciones exponenciales y logarítmicas**

Una función **exponencial** viene dada por:

$$f(x) = a^x$$

donde a es un número real cualquiera positivo y diferente de cero, que llamamos base. En particular, destacamos la función exponencial de base $e = 2{,}71828182\ldots$, que es un número irracional.

La función **logaritmo** se define como la inversa de la función exponencial. Así tenemos que

$$g(x) = \log_a x$$

que satisface las siguientes propiedades:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \log_a a^x = x$$

es decir una función es la inversa de la otra.

En particular, cuando $a = e = 2{,}71828182\ldots$ tenemos la función exponencial propiamente dicha e^x y el logaritmo de base e o neperiano: $\ln x$.

- **Funciones trigonométricas**

Las tres funciones **trigonométricas** más importantes son:

el **seno:** $f(x) = \sin(x)$

el **coseno:** $f(x) = \cos(x)$

y la **tangente:** $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Estas funciones son periódicas, es decir, sus valores se repiten con un periodo determinado, en este caso 2π.

- **Funciones hiperbólicas**

Las funciones **hiperbólicas** se construyen a partir de la función exponencial. Las más importantes son tres:

el **seno hiperbólico:** $f(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

el **coseno hiperbólico:** $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

y la **tangente hiperbólica:** $f(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

- **Representación algebraica, tabular y gráfica de una función real de variable real**

Supongamos la función $f(x) = x^2$. Utilizando Mathcad, expresamos a la izquierda los valores de la variable y de función en una tabla y a la derecha la gráfica de la función.

$f(x) := x^2$ **x es la variable independiente** **f(x) es la variable dependiente**

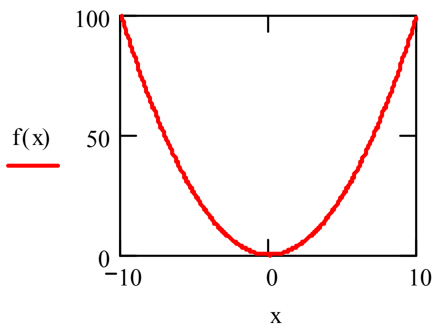
$x := -10, -9.95 .. 10$ **de separación entre los puntos a representar**

x =

	0
0	-10
1	-9.95
2	-9.9
3	-9.85
4	-9.8
5	-9.75
6	-9.7
7	-9.65
8	-9.6
9	-9.55
10	-9.5
11	-9.45
12	-9.4
13	-9.35
14	-9.3
15	-9.25

f(x) =

	0
0	100
1	99.002
2	98.01
3	97.022
4	96.04
5	95.062
6	94.09
7	93.122
8	92.16
9	91.202
10	90.25
11	89.302
12	88.36
13	87.422
14	86.49
15	85.562



- **Paridad de funciones. Función par, función impar y función carente de simetría**

Presentamos tres funciones para el estudio de su paridad:

$$f(x) = 3x^2 - 4x^4 \qquad g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x \qquad h(x) = x^2 - 6x + 1$$

Puesto que todos los exponentes son pares, el polinomio $f(x) = 3x^2 - 4x^4$ será par. Comprobémoslo analíticamente:

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 4(-x)^4 = 3x^2 + 4x^4 = f(x)$$

Dado que todos los exponentes son impares, el polinomio $g(x) = x^3 + \frac{1}{2}x$ presentará simetria impar. En efecto:

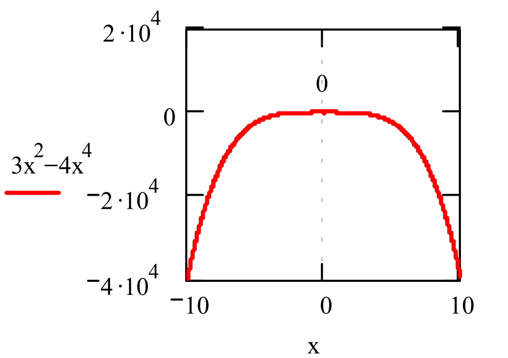
$$g(-x) = (-x)^3 + \frac{1}{2}(-x) = -x^3 - \frac{1}{2}x = -g(x) = -(x^3 + \frac{1}{2}x)$$

Por otro lado, la tercera función $h(x) = x^2 - 6x + 1$ no presenta paridad alguna puesto que mezcla términos polinomiales de exponente par con términos de exponente impar. Fijémonos en la comprobación:

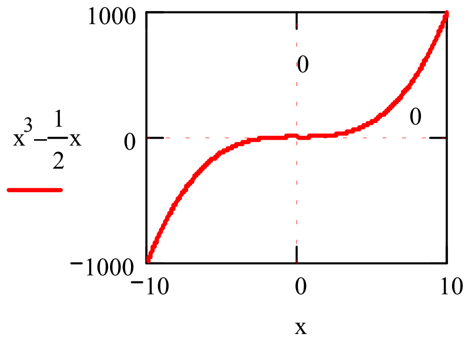
$$h(-x) = (-x)^2 - 6(-x) + 1 = x^2 + 6x + 1 \neq h(x) = x^2 - 6x + 1$$

$$h(-x) = (-x)^2 - 6(-x) + 1 = x^2 + 6x + 1 \neq -h(x) = -x^2 + 6x - 1$$

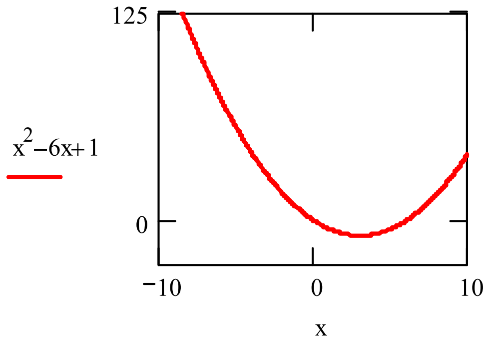
Mathcad nos proporciona la comprobación geométrica. Basta con darse cuenta que la simetria asociada a una función par existe si al doblar la hoja de paper donde está impreso el gráfico utilizando como eje de fijo en la acción de doblar, el eje de las y's, la función en su parte negativa coincide (toca) a la parte positiva, es decir, se solapan perfectamente. Dicho de otra manera, si perpendicularmente a la hoja de papel existe un espejo que incluye el eje y, la imagen de la izquierda quedara reflejada encima de la de la derecha si y sólo si, la función es par. Del mismo modo, para una función impar, sabemos que si efectuamos dos de estas "inversiones" especulares, una según el eje x y la otra según el y, debemos conseguir solapar la función a la izquierda del eje y con la función a su derecha.

La representación gráfica de la función f(x) muestra que efectuando una reflexión a partir del eje de las y's, la parte de las x negativas se solapa perfectamente con la de las x positivas. En efecto, la función es par.	

Por el contrario, en el caso de la función g(x) necesitamos efectuar dos reflexiones, una según el eje de las x y otra según el eje de las y, para conseguir solapar la función para las x negativas encima de la función para las x positivas. Por lo tanto, la función es impar.



La función h(x) no presenta simetría alguna.



- **Búsqueda del dominio y del recorrido de una función**

Sean f, g, h y i las funciones definidas por:

$$f(x) = \sqrt{3x-2} \qquad g(x) = \log(x-1) \qquad h(x) = \frac{4}{x^2-16} \qquad i(x) = \sin(\frac{1}{x})$$

Hallaremos el dominio de cada una de ellas y luego las representaremos gráficamente con Mathcad para averiguar sus recorridos.

Para determinar el dominio de f(x) tenemos que preguntarnos si existe alguna operación que no podemos efectuar dentro de $\Re$, el cuerpo de los reales, cuando evaluemos –paso a paso- la función f(x). Dado que siempre podemos multiplicar un real como el 3 por la variable independiente x y luego efectuar la resta con 2, no vemos en las operaciones a realizar riesgo alguno. No obstante, el número obtenido después de evaluar 3x-2 puede ser negativo. Dado que no podemos sacar raíces cuadradas de números negativos en $\Re$, x tiene que ser tal que 3x-2 sea mayor o igual que cero.

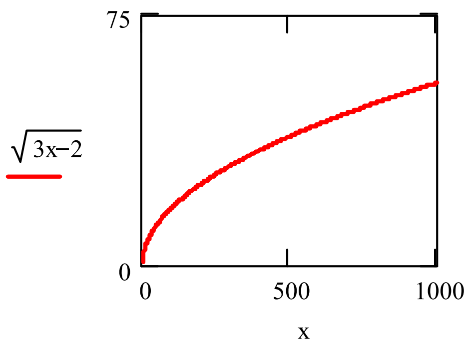
Resolviendo la inecuación $3x - 2 \geq 0$ obtenemos el dominio de f(x): $\left[\frac{2}{3}, \infty\right)$ que también podemos escribir como: Dom f(x): $\left\{x \in \Re / x \geq \frac{2}{3}\right\}$. Ambas notaciones son equivalentes; la primera indica un intervalo de la recta real que contiene exactamente los mismos puntos que en el conjunto expresado utilizando la segunda notación. Fijaros que el intervalo es cerrado por la izquierda (incluye el $\frac{2}{3}$) y es abierto por la derecha porque el infinito (∞) no forma parte de los números reales.

En el caso de g(x) las limitaciones al dominio sólo pueden estar originadas en la última operación que realizamos: el logaritmo. Por la definición de logaritmo (l es el logaritmo base 10 de un número z si $z=10^l$), éste no puede obtenerse nunca de números negativos o de cero (ya que no se puede obtener cero ni ningún real negativo a partir de una potencia de 10).

Esto nos conduce también para g(x) a una inecuación: $x - 1 > 0$, que una vez resuelta determina el dominio de g(x), a saber, $(1, \infty)$ o $\{x \in \Re / x > 1\}$. Notad que 1 no forma parte de Dom g(x) puesto que para x=1 obtendríamos log(0) que no existe en $\Re$ ($\lim_{x \to 1^+} \log(x-1) = -\infty$)

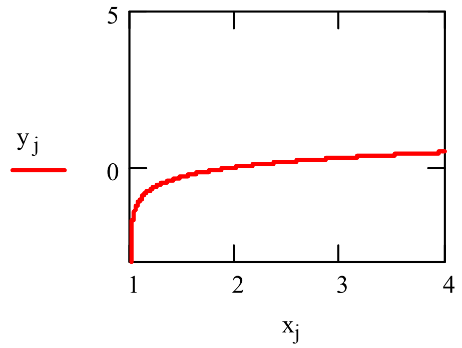
En el caso de una función racional, como h(x), tenemos que excluir del dominio aquellas x que anulan el denominador, es decir que ocasionan que $x^2 - 16 = 0$ y resultarían en la imposibilidad de obtener una imagen h(x) real. Esto corresponde a dos puntos: $x = 4$ y $x = -4$. Por tanto, Dom h(x)= $\{x \in \Re / x \neq 4, x \neq -4\}$ o —utilizando la notación de intervalos— Dom h(x)= $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$.

Por la misma razón que para h(x), hay que excluir el punto x=0 del dominio de i(x); es imposible hallar el valor de la función si la variable independiente no es un número real, sino infinito.

Para determinar el recorrido de cada función, las representaremos con Mathcad. Aquí tenemos la primera.	

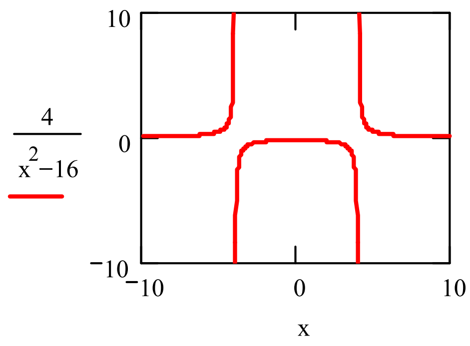
Vemos que f(x) crece de forma continua desde cero. El recorrido será igual a todos los reales positivos además del cero, es decir: Im f(x)=$[0,\infty)$ o $\{y \in \Re / y \geq 0\}$.

Representamos g(x) también con Mathcad, utilizando un paso no lineal para representar mejor la divergencia hacia $-\infty$ cuando x se aproxima a 1.

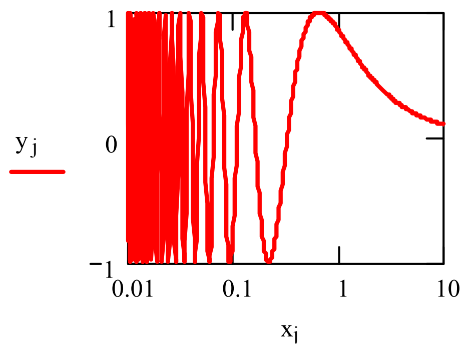
Representamos con Mathcad la función g(x) que sólo está definida para valores de la variable mayores que la unidad.	$j := 1 .. 99999$ $x_j := 10^{0.0001 \cdot j}$ $y_j := \log(x_j - 1)$ 

Desde x=1 hasta x=2, g(x) crece rápidamente. Para valores más grandes, el crecimiento continua, pero más lentamente. El recorrido será igual a todos los reales (positivos y negativos), es decir: Im g(x)=$(-\infty,\infty)$ o $\{y \in \Re\}$.

Para h(x) vemos como el recorrido lo forman todos los números reales positivos y los negativos menores o iguales que –0.25. Es decir: Im h(x)=$(-\infty,-0.25] \cup (0,\infty)$. Notad que esta función posee simetría par h(x) puesto que h(-x)=h(x).

Esta es la gráfica que Mathcad nos proporciona para la función h(x).	

La función i(x) posee simetría impar ya que i(-x)=-i(x). Dado que la función seno proporciona valores entre –1 y 1, el recorrido corresponderá a intervalo cerrado $[-1,1]$ es decir Im i(x)= $\{y \in \Re / -1 \leq y \leq 1\}$.

Aquí ilustramos con Mathcad el comportamiento oscilatorio de i(x) al acercarse a cero la variable independiente.	$j := 1 .. 9999$ $x_j := 10^{-3}\pi + 10^{-6} \cdot 10^{0.005 \cdot j}\pi$ $y_j := \sin\left(\frac{1}{x_j}\right)$ 

- **Composición de dos funciones. Dominio y recorrido de la función compuesta. Relación con los dominios y recorridos de las funciones de partida**

Supongamos f y g dos funciones definidas por:

$$f(x) = x^2 - 2 \qquad g(x) = \sqrt{x} - 2$$

Vamos a hallar las funciones compuestas f○g(x) y g○f(x) y comprobaremos el resultado obtenido con Mathcad.

Por definición, la función compuesta *f*○*g(x)* se construye aplicando *f(x)* a la imagen de *g(x)*, es decir:

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x} - 2) = (\sqrt{x} - 2)^2 - 2$$

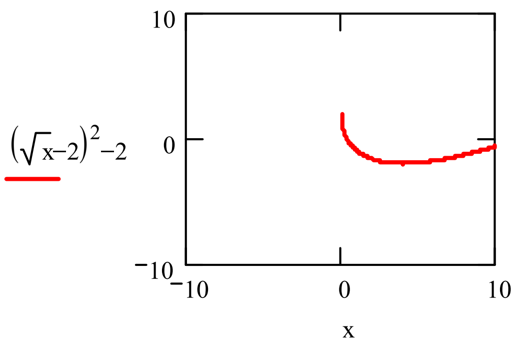
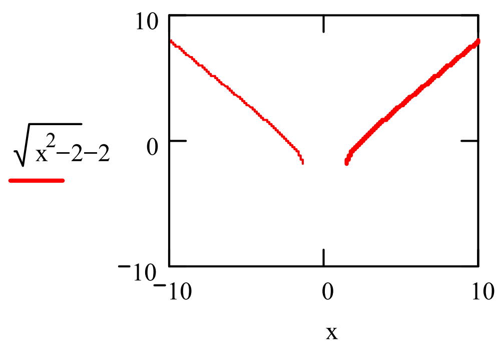
De la misma manera, podemos escribir para *g*○*f(x)* que:

$$g(f(x)) = g(x^2 - 2) = \sqrt{x^2 - 2} - 2$$

Reproducimos aquí el cálculo simbólico realizado utilizando Mathcad:

Componemos las funciones y después evaluamos simbólicamente el resultado mediante View > Toolbars > Symbolic > Symbolic Evaluation.	$f(x) := x^2 - 2$ $g(x) := \sqrt{x} - 2$ $f(g(x)) \rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}} - 2\right)^2 - 2$ $g(f(x)) \rightarrow \left(x^2 - 2\right)^{\frac{1}{2}} - 2$

Los dominios de las funciones *f(x)* y *g(x)* son $(-\infty,\infty)$ y $[0,\infty)$, respectivamente. Dado que el dominio de *f(x)* es toda la recta real, el dominio de *f∘g(x)* sólo vendrá limitado por el dominio de *g(x)* y, por tanto, coincidirá con éste. En el caso de la función *g∘f(x)*, el dominio resulta de restringir la recta real a aquellos puntos *x* para los cuales es posible obtener una raíz cuadrada de x^2-2, es decir, para $x \geq \sqrt{2}$ y $x \leq -\sqrt{2}$. Así pues, *Dom(g∘f(x))*=$\left(-\infty,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2},\infty\right)$.Los recorridos se obtienen fácilmente a partir de las gráficas generadas con Mathcad:

La representación gráfica de ambas funciones corresponde a:	 

En este caso particular, para ambas funciones compuestas, *f○g(x)* y *g○f(x),* el recorrido coincide: $[-2,\infty)$.

- **Obtención de la función inversa**

Calculad la función inversa de:

$$y(x) = (x-1)^3$$

Solucionamos el problema paso a paso. Primero aplicamos la raíz cúbica a ambos lados de la ecuación:

$$\sqrt[3]{y(x)} = x - 1$$

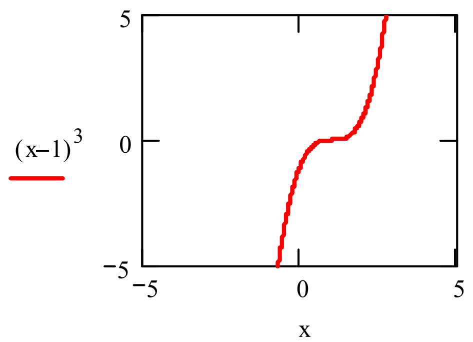
Luego despejamos la x obteniendo:

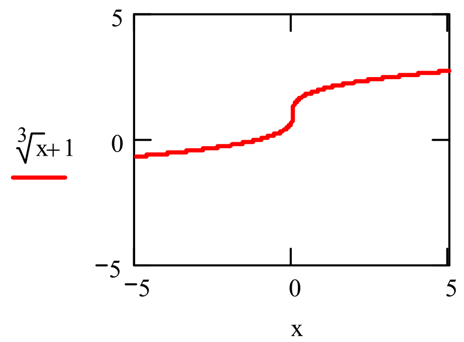
$$\sqrt[3]{y(x)} + 1 = x$$

Un cambio de orden (izquierda ↔ derecha) en la ecuación y la substitución de x por y nos permite escribir:

$$y(x) = \sqrt[3]{x} + 1$$

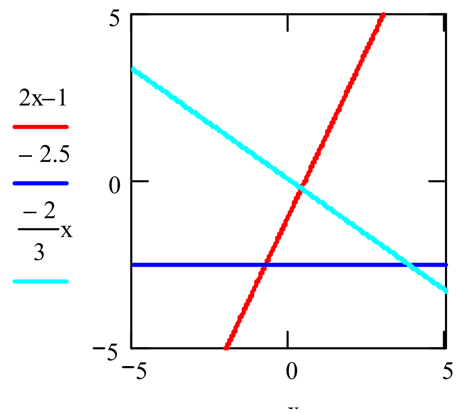
Con Mathcad generamos la representación gráfica de la función y su inversa:





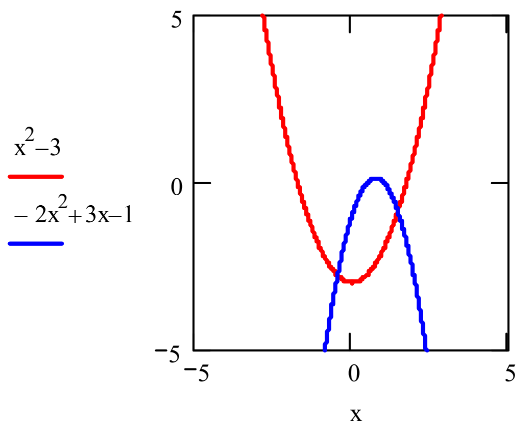
- **Funciones lineales**

Las tres rectas representadas con Mathcad corresponden a una función creciente, una constante y la tercera, decreciente:



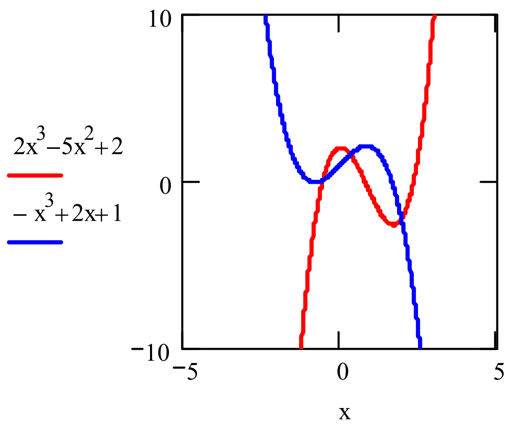
- **Funciones cuadráticas**

La primera parábola corresponde a una función cuadrática con el coeficiente del término de mayor grado positivo. En la segunda tenemos las ramas hacia las y's negativas puesto que el coeficiente de mayor grado es negativo.

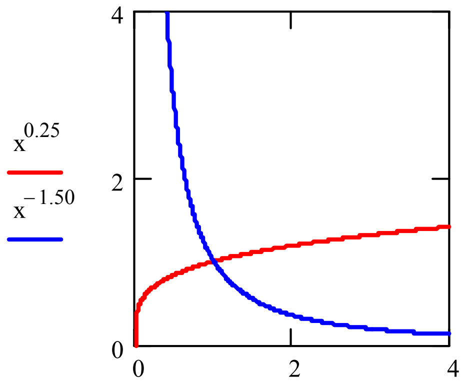


- **Funciones cúbicas**

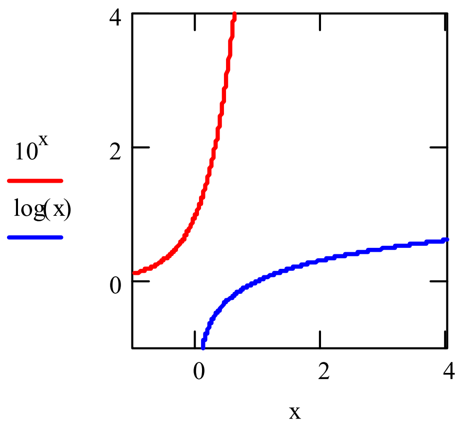
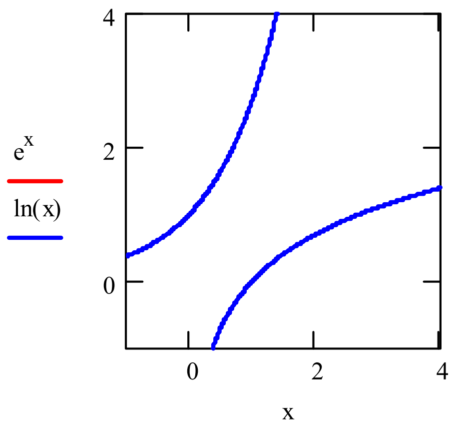
Cuando el coeficiente de mayor grado (grado tres) es positivo, la función cúbica avanza de menos infinito a más infinito mientras que cuando dicho coeficiente es negativo, la función avanza de más infinito hasta menos infinito.



- **Funciones potenciales**

Cuando el exponente de una función potenciales positivo, la función crece, y cuando es negativo, decrece.	

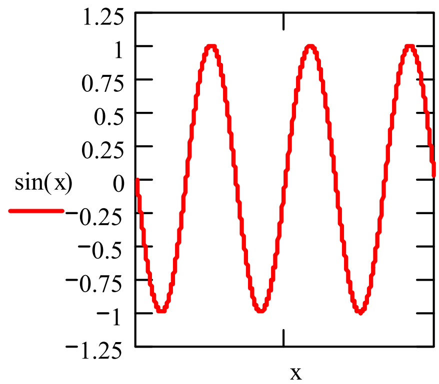
- **Funciones exponenciales y logarítmicas**

Estas son las funciones exponencial y logarítmicas más comúmente utilizadas. Exponencial y logaritmo base 10.	
Exponencial y logaritmo neperiano (base e).	

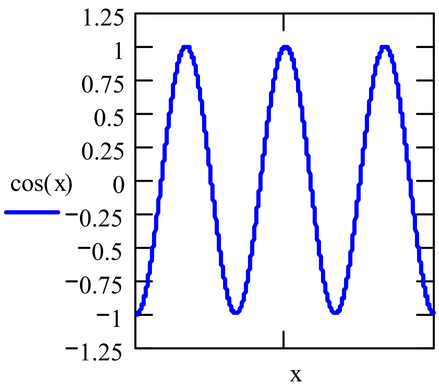
- **Funciones trigonométricas**

Las tres funciones trigonométricas más importantes son el seno, el coseno y la tangente. Aquí las representamos con Mathcad en el segmento de la recta real $[-3\pi,3\pi]$.

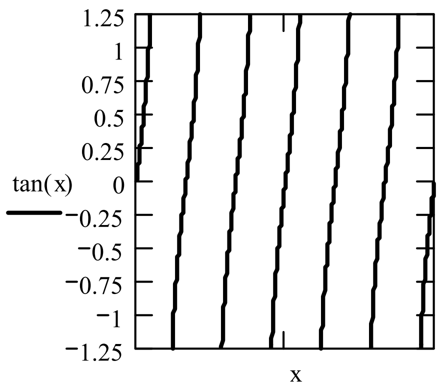
El seno es una función impar de período 2π.



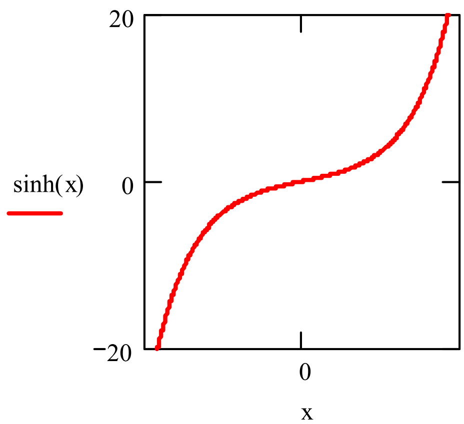
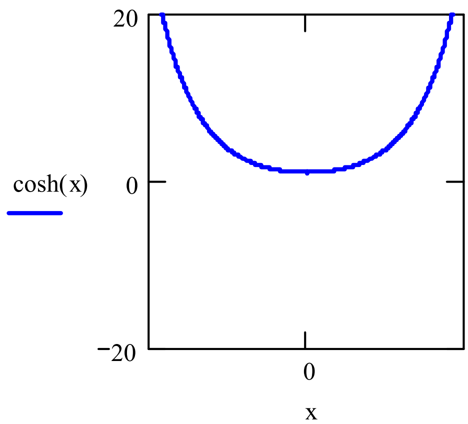
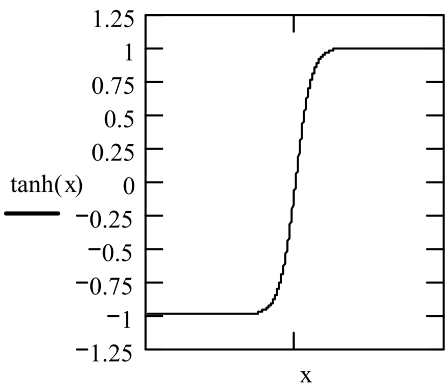
El coseno también tiene período 2π pero es par. De hecho equivale al seno si desplazamos el origen de coordenadas $\frac{\pi}{2}$.



La tangente, que es el cociente entre el seno y el coseno, tiene período π y es una función impar.



- **Funciones hiperbólicas**

Las tres funciones hiperbólicas más importantes son el seno hiperbólico, el coseno hiperbólico y la tangente hiperbólica. Aquí las representamos con Mathcad entre $[-4,4]$. El seno hiperbólico es una función impar.	
El coseno hiperbólico es una función par.	
La tangente hiperbólica, al ser el cociente entre una función impar y una par, es también una función impar.	

CONCLUSIONES

Hemos introducido el concepto de función real de variable real y, posteriormente, hemos proporcionado las definiciones de dominio y recorrido de una función. Tanto la representación tabular (en forma de tabla de valores) como la gráfica han sido introducidas haciendo hincapié en la segunda que se utiliza de forma común en todos los ejemplos. En la parte central de este Mathblock hemos tratado de la existencia de función inversa y de la composición de funciones. Hemos visto que no siempre existe la función inversa de una función cualquiera.

En la segunda parte de este Mathblock nos hemos centrado en una variedad de ejemplos de funciones describiendo sus propiedades más importantes: la simetria, el crecimiento o decrecimiento, etc. Un sinfín de funciones que permitan representar el comportamiento de las magnitudes que utilizaremos en la ingenieria.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. M. Ortega (1990): "Introducción al Análisis Matemático", Manuales de la Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

[2] V.A. Kudryasvtsev and B.P. Demidovich (1981): "A brief course of Higher Mathematics", Mir Publishers, Moscú, p. 79-107.

[3] T.A. Apostol (1981): "Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal", Reverté, Barcelona, p. 162-165.

[4] M. R. Spiegel (1970): "Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas", Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, Mexico, p. 11-20, 23-25, 26-31.

[5] R. Calm, N. Coll, y M.R. Estela (1992): "Problemas de cálculo", Micromar, Barcelona, p. 66-106.

[6] R. Courant and F. John (1976): "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Limusa, México, p. 41-78.

[7] F. Udina (2000): "Las funciones de una variable", Ediuoc, Barcelona, p. 7-49.

[8] B. Demidovich (1978): "Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático", Paraninfo, Madrid, p. 7-19.

[9] M.R. Estela, E. Cuello y A.Carmona (2000): "Cálculo: Problemas y soluciones", Edicions UPC, Barcelona, p. 33-46.

[10] T.M. Apostol (1979): "Análisis Matemático", Reverté, Barcelona, p. 41-45.

ENLACES

[W1] http://www.satd.uma.es/a_valverde/aula-calculo/calculo.html
Excelente aula virtual con apuntes muy completos de funciones escalares y vectoriales (C5).

[W2] http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/cie_mat_calculo/apuntes.html
El capítulo 1 de esta serie de apuntes contiene una parte dedicada a las funciones reales de variable real y a sus propiedades.

[W3] http://www.monografias.com/trabajos7/mafu/mafu.shtml
Monografía sobre funciones reales de variable real.

[W4] http://www.ciudadfutura.com/matematicas/analisis/f_real_1var.html
Resumen conciso de las propiedades de las funciones reales de variable real.

[W5] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/apuntes/
Apuntes sobre funciones.

[W6] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/problemas/
Problemas y ejercicios sobre funciones.

[W7] http://www.planetmath.org/encyclopedia/Function.html
Página web de PlanetMath.org dedicada a la definición de función, describe el dominio y el recorrido.

[W8] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/deri_limi/default.htm
Apuntes de cálculo con funciones.

[W9] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/calculo_1/default.htm
Excelente resumen de cálculo (límites, derivación, integración, etc) con funciones.