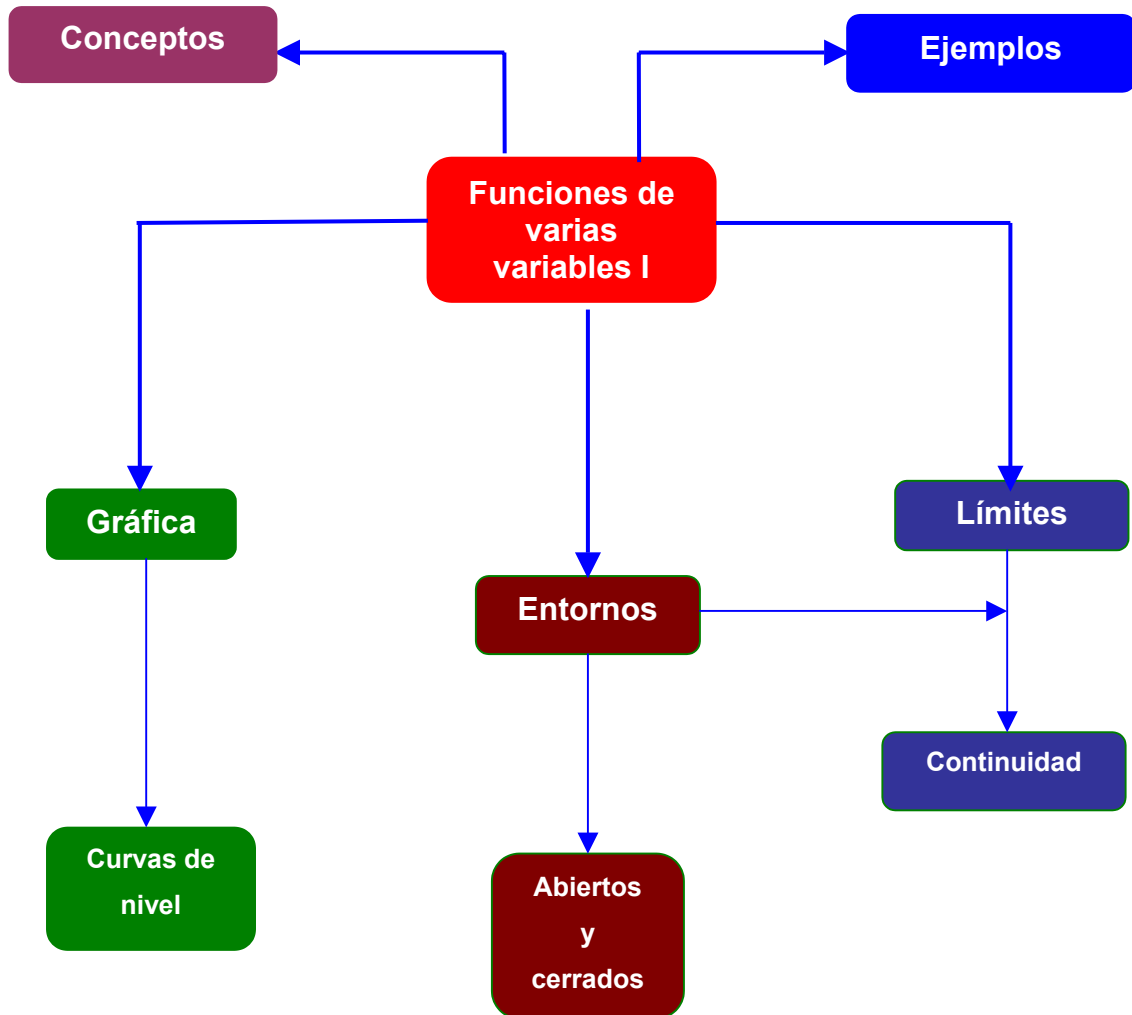


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I

Autores: Paco Martínez (jmartinezbos@uoc.edu), Patrici Molinàs (pmolinas@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

No siempre es posible expresar una magnitud como función matemática de una sola variable. Al contrario, las funciones de interés en ingeniería dependerán –en general- de un gran número de variables. Este Math-block está dedicado a extender a funciones de más de una variable los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad que ya hemos visto en una dimensión en bloques anteriores.

Empezaremos proporcionando ejemplos de magnitudes que se describen mediante funciones de varias variables y representaremos en tres dimensiones las funciones de dos variables.

Después introduciremos las nociones topológicas necesarias para definir el concepto de distancia, que nos permite definir bolas, entornos, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conjuntos compactos y puntos de acumulación.

Más tarde presentaremos el concepto de continuidad basándonos en la definición de límite, e ilustraremos el cálculo de límites de funciones de más de una variable.

OBJETIVOS

1. Aproximarnos al concepto de funciones de varias variables.
2. Saber relacionar las curvas de nivel de una función con su gráfico.
3. Entender la extensión de los conceptos de continuidad y límites para funciones de varias variables.
4. Clasificar, topológicamente, un conjunto 2D.
5. Saber calcular límites direccionales y generales.
6. Representar gráficamente, con la ayuda del Mathcad, funciones de 2 variables y sus curvas de nivel.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir con éxito esta unidad es recomendable haberse leído los siguientes Math-blocks: Uso básico del Mathcad, Funciones de una variable, Límites de funciones, Continuidad, Derivación y Estudio local y representación gráfica en 2D.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

□ Definición de función de varias variables: Gráfica y curvas de nivel.

Una **función con n variables reales** es una regla f que asocia a cada punto $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n$ un único número real $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Representaremos esta función como $f: D \rightarrow \mathbf{R}$. D se llama **dominio** de definición de f .

Ejemplos:

1.- Un sistema de fiabilidad con estructura en serie, formado por cuatro componentes (o bien en circuitos eléctricos) funciona (la corriente pasa) si los cuatro componentes lo hacen. La función de varias variables que describe el sistema sería $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$ donde el componente i funciona si $x_i = 1$, y no lo hace si $x_i = 0$. Luego el sistema funciona si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

2.- Veamos el dominio de las siguientes funciones:

$f(x, y) = x^2 + y^2$. $f(x, y)$ está definida para cualquier par de valores reales (x, y) . Por tanto, $D = \mathbb{R}^2$.

$g(x, y) = \frac{2}{x - y}$. $g(x, y)$ está definida para cualquier par de valores reales (x, y) tal que $x \neq y$ (para que no se anule el denominador). Luego el dominio es todo los puntos del xy -plano excepto los que están sobre la recta $y = x$.

$h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Como $1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$. Luego el dominio es todo los puntos del xy -plano excepto los que están en el círculo de radio 1 y centro el origen de coordenadas, es decir, $D = \mathbb{R}^2 - \bar{B}_1(0, 0)$. Donde $\bar{B}_1(0, 0)$ es la bola cerrada de centro $(0, 0)$ y radio 1.

$i(x, y) = \ln(x + y)$. El dominio de la función son aquellos pares (x, y) tales que $x + y > 0$, el logaritmo no puede tener un argumento negativo o cero. Gráficamente, el conjunto dominio está constituido por uno de los semiplanos limitados por la recta $x + y = 0$ ($y = -x$).

La **gráfica de una función de dos variables** $z = f(x, y)$, es la representación 3D (a partir de unos ejes cartesianos X, Y, Z) de todas las combinaciones posibles de valores (x, y, z) . Es decir, para cada par de valores (x, y) encontraremos la imagen z a través de la función f . Los tres valores definen un punto en el espacio de tres dimensiones. El conjunto de todos estos puntos nos da la gráfica de la función.

Dada una función f de n variables $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y un número real cualquiera c , se define la **curva de nivel** de la función f asociada a un determinado valor c de z ($z = c$) como el conjunto de puntos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tales que verifican la siguiente condición: $f(x) = c$.

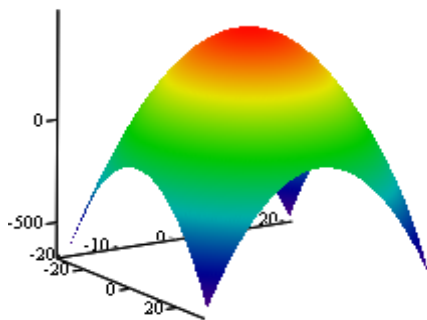
En particular, para una función de dos variables $z = f(x, y)$, la **curva de nivel** para $z = a$, es el conjunto de todos los pares de valores (x, y) tales que su imagen sea a . Si denotamos esta curva de nivel como $C_{z=a}$, podemos decir que:

$$C_{z=a} = \{(x, y) \text{ tal que } f(x, y) = a\}$$

Podemos representar las curvas de nivel en dos dimensiones (usando los ejes X, Y). La representación coincidirá con el perfil que resulta de seccionar horizontalmente la gráfica de la función a un nivel (o altura) de valor $z = a$. El conjunto de curvas de nivel se llama **mapa de curvas de nivel**.

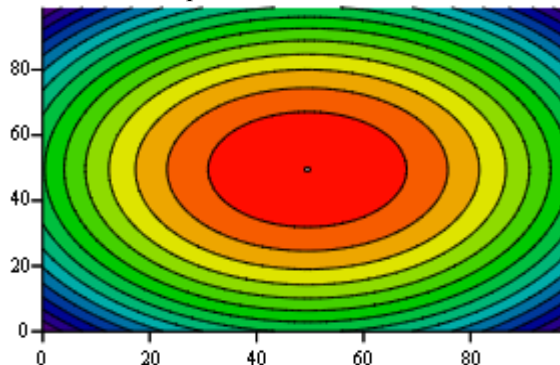
Ejemplo: Supongamos que tenemos un ordenador con una placa metálica de grandes dimensiones. La temperatura de la placa (lo que nos dará una idea de como tiene que ser el ventilador para que no se caliente en exceso) es función de las coordenadas de cada uno de sus puntos y viene dada por: $T(x, y) = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$. Veamos la gráfica y el mapa de curvas de nivel, en $[-30, 30] \times [-20, 20]$.

Gráfica 3D



surf

Mapa de curvas de nivel



M

□ **Definición de Entornos: Conjuntos abiertos y cerrados. Compactos.**

Un **rectángulo A** en \mathbb{R}^n es aquel conjunto de puntos cuyas coordenadas están limitadas por intervalos.

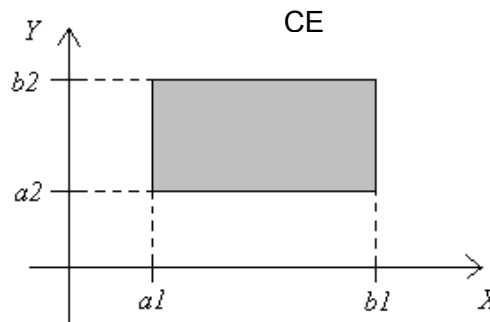
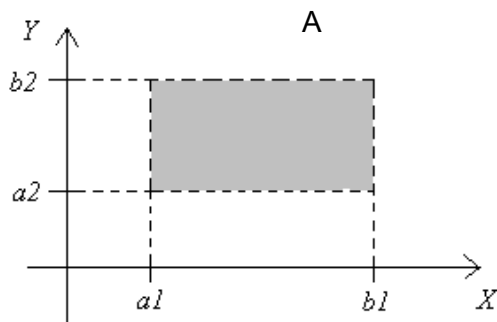
- **Rectángulo abierto:** no contiene ninguno de los extremos:

$$A = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_n < x_n < b_n \}$$

- **Rectángulo semi-abierto:** contiene alguno de los extremos de los intervalos.

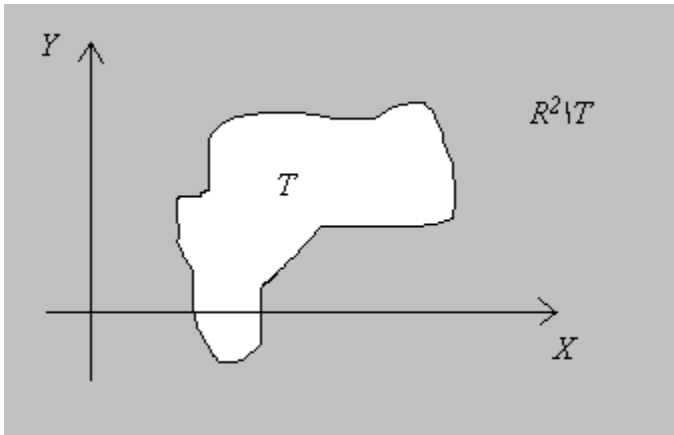
- **Rectángulo cerrado:** contiene todos los extremos de los intervalos:

$$A = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n \}$$



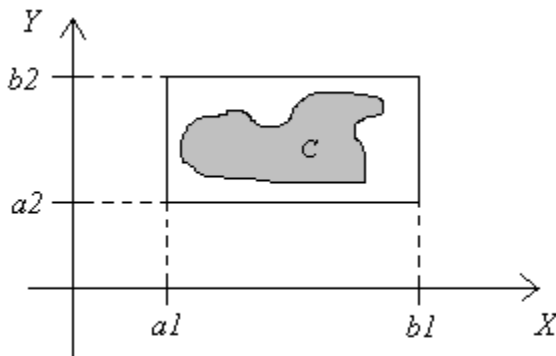
Un conjunto O de \mathbb{R}^n es **abierto** si para cualquier punto x del conjunto existe algún rectángulo A que contiene el punto y que está totalmente contenido en el conjunto. La **unión** y la **intersección** de dos conjuntos abiertos es otro abierto.

Un conjunto T de \mathbb{R}^n es **cerrado** si su complementario, $\mathbb{R}^n \setminus T$, es abierto. La **unión** y la **intersección** de dos conjuntos cerrados es un cerrado.



Un **entorno** de un punto x de \mathbb{R}^n es cualquier conjunto dentro del cual haya un abierto que contenga al punto.

Un conjunto C de \mathbb{R}^n está **acotado** si lo podemos incluir dentro de un rectángulo cerrado.



Se dice que un conjunto es **compacto** cuando es cerrado y acotado.

□ **Definición de límite: continuidad.**

En caso de que exista, el **límite** cuando $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tiende a $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ de una función $f(x)$ se representa por:

$$l = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Ejemplos:

1) Veamos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos\left(\pi \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right) = 1.$

Solución:

Dado que el límite de $\cos(z)$ existirá siempre que z pertenezca a \mathbb{R} , tenemos que calcular el límite de la función $z = \pi \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Para resolver este límite basta con fijarse que la función z puede expresarse como el producto de dos funciones:

$$\pi \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \left(0 \leq \pi \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1 \right)$$

e

y

Como el valor absoluto de la primera está acotado y la segunda tiende a 0, entonces, el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} z = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \pi \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \text{ y el límite de su coseno, } 1.$$

2) Veamos que no existe el límite: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 \cdot y)}{x \cdot y^2}$. Para demostrar la no existencia de

límite, basta con probar que para una posible aproximación $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ el límite no existe. Supongamos que intentamos efectuar el cálculo de este límite aproximando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ siguiendo la curva dada por la dependencia funcional $y = x^k$ con $k > 0$. Siguiendo esta

curva, el cálculo del límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin\left(\frac{x^2 \cdot y}{x \cdot y^2}\right)$ resultaría en un límite unidimensional:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{x^{2+k}}{x^{1+2k}}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{1-k}$$

Cuando $k > 1$ este límite unidimensional no existe puesto que la función x^{1-k} tiende a infinito. Por lo tanto, el límite bidimensional no existe.

El cálculo de **límites direccionales** se utiliza a menudo para estudiar aquellos límites en los cuales tengamos algún problema. Consideremos un determinado punto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y un vector director $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. El límite de una función $f(x)$ en el punto a y en la dirección v se calcula de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(a_1 + t \cdot v_1, a_2 + t \cdot v_2, \dots, a_n + t \cdot v_n)$$

Es importante recordar las siguientes **propiedades**:

Si el límite en una determinada dirección v no existe, entonces el límite general tampoco.

Si todos los límites direccionales existen pero no son todos iguales, entonces el límite general tampoco existe.

Una función $f(x)$ es **continua en un punto** $x = a$ si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) El punto $x = a$ es un punto del dominio de la función, es decir, existe $f(a)$.

- (2) Existe el límite de la función cuando x tiende al punto a .
 (3) El límite y el valor de la función en el punto coinciden, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Una función es **continua en un conjunto** si es continua en cada uno de los puntos del conjunto.

Ejemplo: Veamos si es continua la función $\cos\left(\pi \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right)$ en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Solución:

Para que la función sea continua en (x, y) , basta con que la imagen del argumento del coseno sea real porque el coseno es una función continua en \mathbb{R} . El argumento, $\pi \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, es real en todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ salvo en $(0,0)$ donde la función no está definida. No obstante, hemos visto anteriormente que el límite del argumento existe y vale 1, entonces en $(0,0)$ tenemos una discontinuidad evitable. Entonces, podemos construir una extensión continua de la función de la siguiente manera:

$$f_c(x) = \begin{cases} \cos\left(\pi \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right) & \text{cuando } (x, y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{y cuando } (x, y) = (0,0), \end{cases}$$

respectivamente.

Teorema de Weierstrass: toda función continua en un conjunto compacto tiene siempre un máximo y un mínimo absolutos.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

□ Ejemplo de cálculo de dominio y representación gráfica:

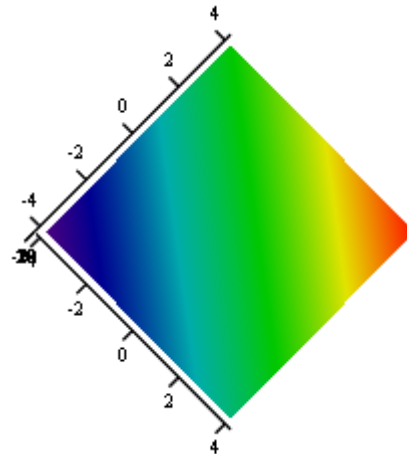
Dada la función $z = f(x,y) = 3x + 4y$, se pide:

- ¿Cuál es el dominio de esta función?.
- ¿Cómo es la gráfica de la función?. Dibújala con el Mathcad.
- ¿Cuál es la curva de nivel para el valor $z = 12$?. Deducirla matemáticamente. Dibujar el mapa de curvas de nivel de la función. Interpretarla.

La función está definida para cualquier par (x,y) de \mathbb{R}^2 . Por tanto, $D = \mathbb{R}^2$.
La gráfica de la función es un plano. De hecho, las funciones $f(x,y) = ax + by$ son llamadas funciones lineales en dos variables.

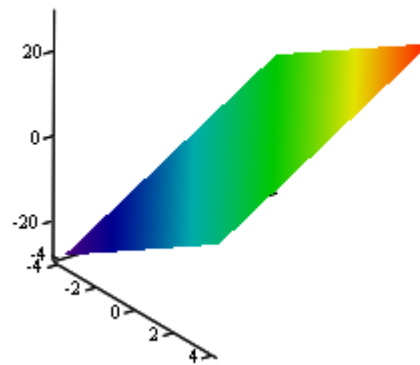
<p>Introducimos la función a representar.</p> <p>Definamos el área (subconjunto de \mathbb{R}^2) donde vamos a representar la función $F(x,y)$.</p> <p>También tenemos que proporcionar el número de puntos por dirección donde la función será evaluada.</p> <p>Definamos la función surf como la "red" de puntos generados con $F(x,y)$</p>	$F(x,y) := 3x + 4y$ $xlow := -4 \quad xhigh := 4$ $ylo := -4 \quad yhigh := 4$ $xn := 100$ $yn := 100$ $surf := CreateMesh(F, xlow, xhigh, ylo, yhigh)$
--	---

Utilizamos *Surface Plot* de *Graph* para representar esta función.



surf

Efectuando una rotación en el espacio, podemos obtener la imagen de la función desde perspectivas diferentes. Basta con pinchar con el botón izquierdo del cursor en la figura desplazándolo. Alternativamente podemos pinchar la figura con el botón derecho y seguir el menú que se abre al escoger *format*.



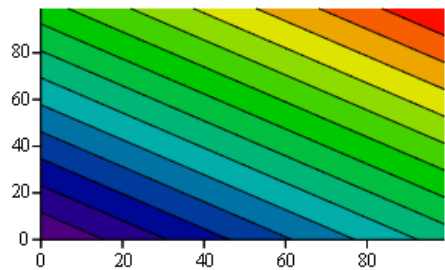
surf

c) La curva de nivel de valor $z = 12$ está formada por todos los pares (x, y) tal que $f(x, y) = 3x + 4y = 12$ o, dicho de otro modo, tal que $y = 3 - \frac{3}{4}x$.

$$C_{z=12} \left\{ (x, y) \text{ tal que } y = 3 - \frac{3}{4}x \right\}$$

Por tanto, la curva de nivel es una recta.

d) Todas las curvas de nivel son rectas con la misma pendiente, aunque desplazadas de forma paralela.

<p>Introducimos la función a representar.</p> <p>Definamos el área (subconjunto de \mathbb{R}^2) donde vamos a representar las curvas de nivel.</p> <p>También tenemos que proporcionar el número de puntos por dirección donde la función será evaluada.</p> <p>Obtenemos el mapa de las curvas de nivel de la función.</p>	$F(x,y) := 3x + 4y$ $x_{low} := -4 \quad x_{high} := 4$ $y_{low} := -4 \quad y_{high} := 4$ $x_n := 100$ $y_n := 100$ $i := 0..x_n - 1 \quad x_{ind_i} := x_{low} + i \cdot \frac{x_{high} - x_{low}}{x_n - 1}$ $j := 0..y_n - 1 \quad y_{ind_j} := y_{low} + j \cdot \frac{y_{high} - y_{low}}{y_n - 1}$ $M_{i,j} := f(x_{ind_i}, y_{ind_j})$ <p>Level curves:</p>  <p>M</p>
---	--

Las curvas que están situadas más a la derecha tienen asociado un valor de la función mayor. Por tanto, la función crece cuando nos desplazamos hacia esta zona, y decrece conforme nos desplazamos hacia la izquierda.

□ **Ejemplo de clasificación topológica de un conjunto en 2D:**

Considerar el siguiente conjunto $C = \{(x,y) : y > x^2, x > 0, y > 0\}$.

(a) Representarlo gráficamente.

(b) Decir si es un conjunto abierto o cerrado. ¿Es un conjunto compacto?

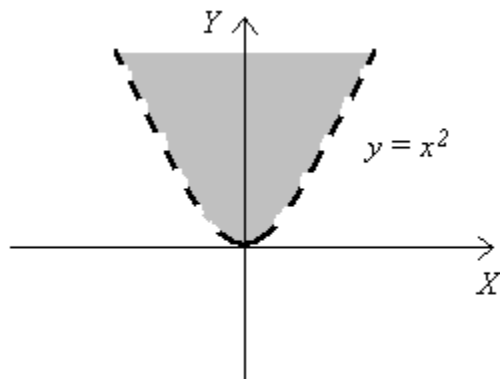
(c) ¿Y si tenemos el conjunto $D = \{(x,y) : y \geq x^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$? ¿es compacto?

(a) Observar que C no es más que la intersección de dos conjuntos:

$$C_1 = \{(x,y) : y > x^2\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$$

Conjunto C_1 :

Para ver qué puntos del plano (x,y) son aquellos que verifican la condición $y > x^2$, hemos de representar la gráfica de la función $y = x^2$. Después, hemos de decidir cuál de las dos zonas en las que nos quedará dividido el plano es la que contiene los puntos que verifican la desigualdad.

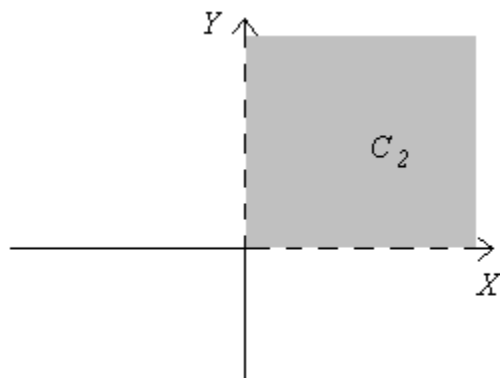


Para decidir que la zona de color gris es la que verifica la desigualdad, sólo se ha de elegir un punto cualquiera de su interior (por ejemplo el $(0,7)$) y comprobar que satisface la desigualdad (efectivamente, $7 > 0^2$).

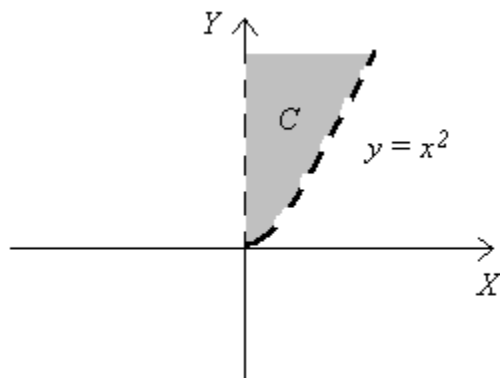
Observar que, como tenemos una desigualdad estricta, los puntos que están sobre la gráfica no pertenecen al conjunto (por tal motivo hay una línea discontinua).

- Conjunto C_2 :

Este conjunto está formado por aquellos puntos situados en el primer cuadrante (la x y la y son siempre positivas). Observar que como las desigualdades son estrictas, los puntos que están sobre los ejes no pertenecen al conjunto:



Haciendo la intersección de los conjuntos anteriores, obtendremos la representación de C :

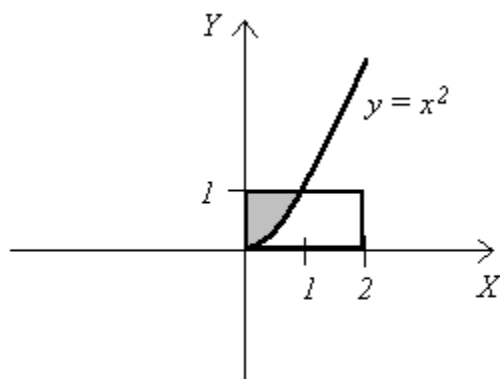


(b) C es **abierto**, ya que para cualquier punto del conjunto podemos encontrar una bola que esté completamente incluida en C. Observar que todas las **desigualdades que aparecen son desigualdades estrictas**. Además, no es cerrado, ya que su complementario no es abierto. Por tanto, como no es un cerrado, no es un conjunto compacto. Observar que, de hecho, el conjunto C no es acotado.

(c) Observar que podemos considerar este conjunto como la intersección de dos conjuntos:

$$D_1 = \{(x,y) : y \geq x^2\} \quad \text{y} \quad D_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$$

El primer conjunto es exactamente el mismo que C_1 pero incluyendo también a los puntos que pertenecen a la gráfica. El segundo conjunto no es nada más que un rectángulo cerrado de 2×1 . La representación del conjunto D es la zona de color gris:



Por la forma que tiene el conjunto D podemos decir que es un conjunto **acotado** (es muy fácil encontrar una bola que contenga al conjunto). Además, está claro que el conjunto es **cerrado** (si consideráis el conjunto complementario a D veréis que es un conjunto abierto). Por tanto, como es un conjunto acotado y cerrado, es un conjunto **compacto**.

□ **Ejemplo de cálculo de límites en dos dimensiones:**

Calculad los límites de las funciones $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siguientes y determinad si las funciones son continuas en los puntos donde calculáis los límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(1 + \sin(x^2 y)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{y^2} \\ \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{d)} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x+y-2} \end{array}$$

Para el cálculo de límites seguimos la siguiente estrategia. Si intuimos que el límite existe, intentamos simplificar la función asociada utilizando la técnica de los infinitésimos equivalentes y/o buscamos como expresar dicha función como una función acotada por una función que tiende a cero. Tenemos que asegurarnos que los cálculos que realizamos corresponden a límites realizados desde todos los posibles entornos alrededor del punto al que hacemos tender las variables (x,y) .

Por el contrario, cuando suponemos que el límite no existe, basta con demostrar que siguiendo dos caminos diferentes que conducen al punto al cual hacemos tender las variables (x,y) , obtenemos valores diferentes.

a) Apliquemos, en primer lugar, el logaritmo a toda la expresión.

$$\ln \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(1 + \sin(x^2 y)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \right)$$

Si el límite de la función existe, la expresión anterior equivaldrá al logaritmo neperiano del límite y será igual al límite del logaritmo neperiano. Lo que nos permitirá escribir:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln \left(\left(1 + \sin(x^2 y)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + \sin(x^2 y))}{x^2 + y^2} =$$

La expresión puede ser multiplicada por equivalencias basadas en infinitésimos equivalentes:

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + \sin(x^2 y))}{x^2 + y^2} \frac{\sin(x^2 y)}{\ln(1 + \sin(x^2 y))} \frac{x^2 y}{\sin(x^2 y)} =$$

siempre que los denominadores de las fracciones unidad (iguales a 1) no sean cero. Separamos pues la resolución del límite en tres partes: A) tanto x como y son diferentes de cero, B) x es diferente de cero e $y = 0$ y C) y es diferente de cero y $x = 0$.

A) en este caso podemos simplificar puesto que los denominadores son diferentes de cero y obtener:

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot y = 0$$

En la segunda igualdad hemos utilizado el hecho que el límite de una función acotada por una función que tiende a cero, es cero. Notad que la primera función $\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$ cuando ambas x e y son distintas de cero. Entonces el límite que buscamos será: $e^0 = 1$ si coincide con el resultado en B) y en C).

B) cuando x es distinto de 0 , pero y es idénticamente igual a 0 , podemos simplificar la expresión de partida obteniendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 0)^{\frac{1}{x^2}} = 1$$

al ser el interior de la potencia un 1 exacto.

C) de la misma forma encontramos que también en el tercer caso ($x = 0$ e $y \rightarrow 0$) el límite vale 1 :

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + 0)^{\frac{1}{y^2}} = 1$$

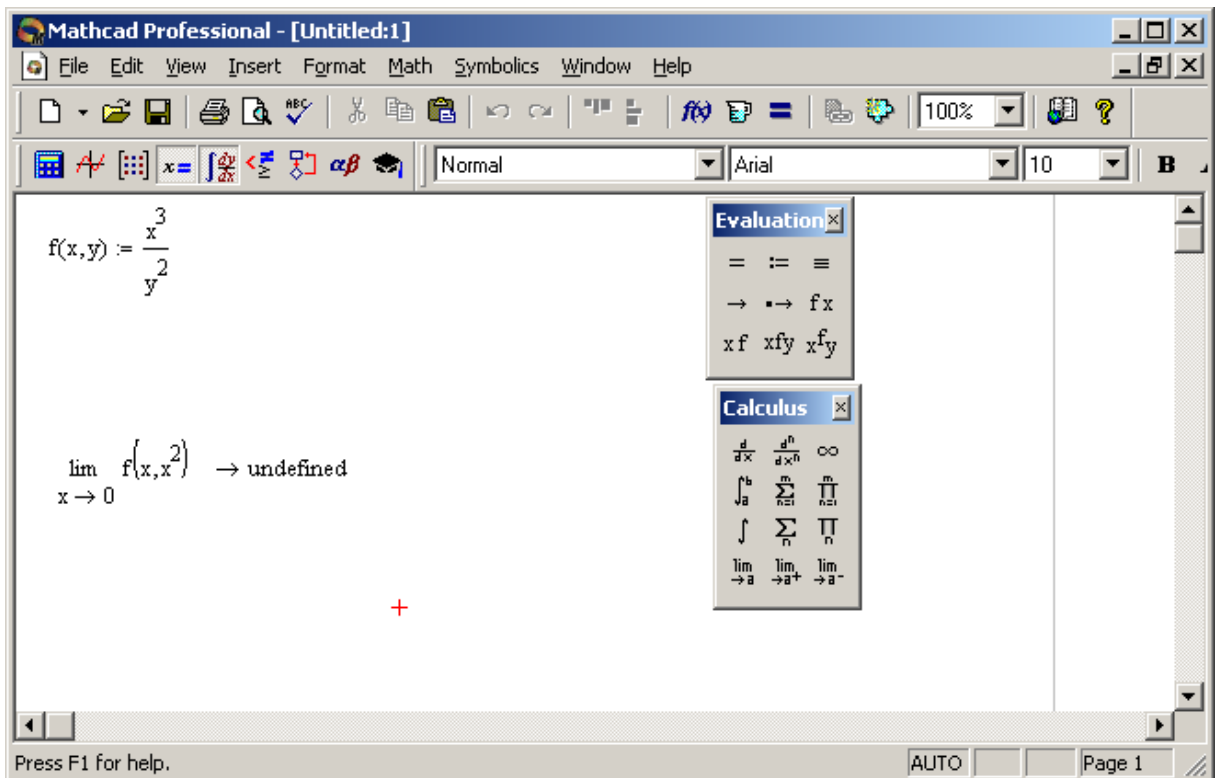
Por lo tanto, el límite de la función cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ es 1 .

Entonces, la función presenta una discontinuidad evitable en el punto $(0,0)$. Basta con definir la función en dicho punto de forma que sea igual al valor del límite: 1 .

b) Es relativamente sencillo demostrar que el $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{y^2}$ no existe. Basta con calcular un

límite de dicha función que diverja. Efectuemos el cálculo del límite suponiendo que (x,y) se aproxima a $(0,0)$ siguiendo la parábola $y = x^2$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$



Por lo tanto, la función presenta una discontinuidad no evitable en el punto $(0,0)$.

c) Efectuemos el cálculo del límite intentando utilizar infinitésimos equivalentes. Dado que en un entorno de $(x,y)=(0,2)$ la variable y nunca será 0 , podemos escribir la siguiente expresión con toda generalidad:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = 1 \cdot 2 = 2$$

Podemos conseguir que la función sea continua en este punto, si definimos que el valor en él sea igual al límite: 2. Se trata pues de una discontinuidad evitable.

d) Demostraremos que el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x-y}{x+y-2}$ no existe calculando dos límites direccionales y obteniendo valores diferentes.

Sabemos que el límite de una función $f(x)$ en el punto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y en la dirección del vector $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ se calcula de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tv) = \lim_{t \rightarrow 0} f(a_1 + t \cdot v_1, a_2 + t \cdot v_2, \dots, a_n + t \cdot v_n)$$

En el primer caso aproximaremos (x,y) a $(1,1)$ siguiendo la dirección del vector $v = (0,1)$:

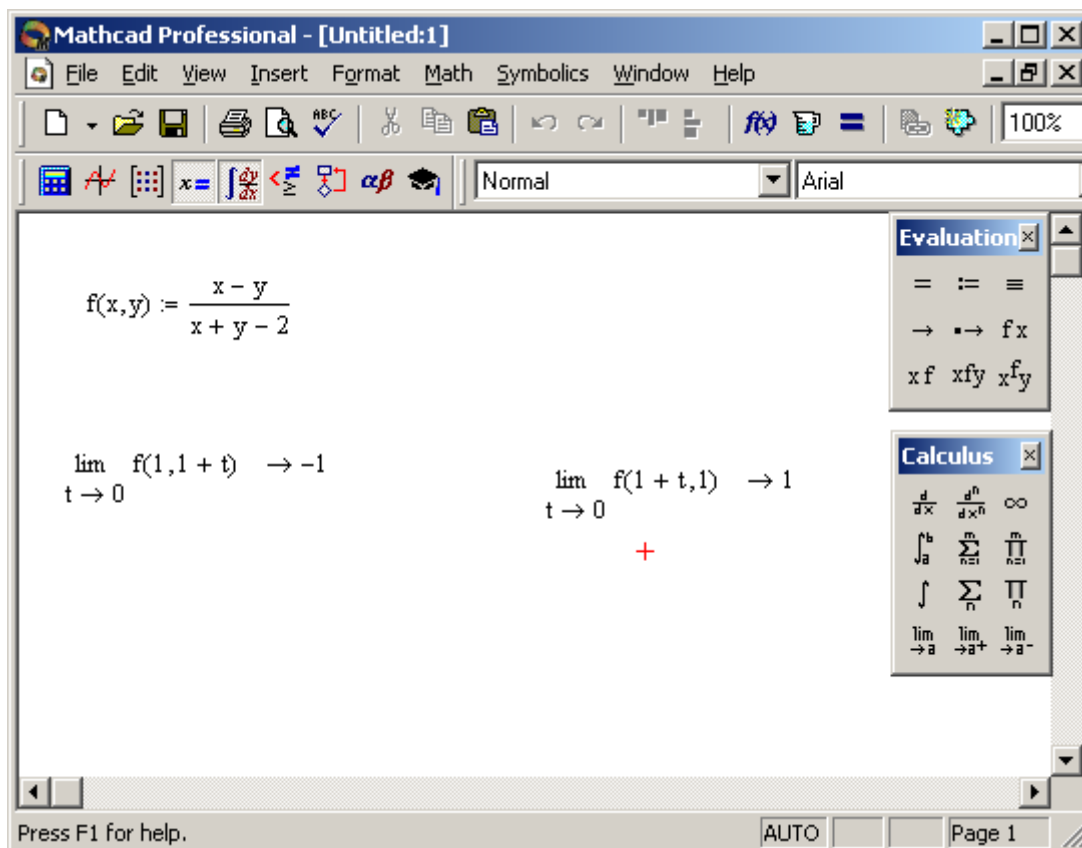
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(1 + t \cdot 0, 1 + t \cdot 1) = \lim_{t \rightarrow 0} f(1, 1 + t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + t)}{1 + 1 + t - 2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -1 = -1$$

En el segundo caso aproximaremos (x,y) a $(1,1)$ siguiendo la dirección del vector $v = (1,0)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(1+t \cdot 1, 1+t \cdot 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(1+t, 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t-1}{1+t+1-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1$$

Por lo tanto, no existe el límite de esta función en $(1,1)$ y, por tanto, la función presenta una discontinuidad no evitable en este punto.

Con Mathcad se podría calcular, también, los límites direccionales:



BIBLIOGRAFÍA

- [1] Benker, H. (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc.
- [2] Moreno, J.A.; Ser, D. (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A.
- [3] Agulió, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1991): "Temes clau de càlcul". Barcelona: UPC.
- [4] Courant, R.; John, F. (1971): "Introducción al cálculo y al análisis matemático". México: Limusa.
- [5] Vaquero, A.; Fernández, C. (1987): "La Informática Aplicada a la Enseñanza". Eudema S.A. Madrid.P 37.
- [6] Ortega J. (1990): "Introducció a l'anàlisi matemàtica". Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.
- [7] Tang, S. (1986): "Applied Calculus". PWS Publishers.
- [8] Burbulla, D.(1993): "Self-Tutor for Computer Calculus Using Maple". Prentice Hall.
- [9] Hunt, R. (1994): "Calculus". Ed. Harper Collins.

ENLACES

[W1] <http://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/dif.html>

Página web donde se extiende el concepto de derivada a funciones de varias variables. Está la teoría con ejemplos.

[W2] <http://www.okmath.com/Catego3.asp?clave=231>

Página web con problemas resueltos sobre Diferenciabilidad de Funciones de Varias Variables.

[W3] <http://planetmath.org/encyclopedia/Differentiable.html>

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre diferenciabilidad. También se pueden buscar en <http://planetmath.org/encyclopedia> otros conceptos como límites, por ejemplo, dándole a la letra L. Está en inglés.

[W4] <http://www.satd.uma.es/matap/svera>

Página web de Salvador Vera Ballesteros, profesor del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad de Málaga. Contiene problemas y apuntes sobre funciones de varias variables.

[W5] <http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/calculo.html>

Página web que trata sobre un curso de cálculo diferencial. Se introduce el concepto de funciones de varias variables y el de derivación parcial. Conceptos muy útiles en las aplicaciones. Hay teoría y ejercicios.

[W6] <http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/calculo/grupo13m/>

Página web del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad politécnica de Madrid. Contiene ejercicios y exámenes sobre funciones de varias variables.

[W7] <http://www.uco.es/organiza/departamentos/quimica-fisica/quimica-fisica/CD/CD0.htm>

Página web que trata sobre un curso de aprendizaje de Mathcad. Hay ejemplos sobre funciones de varias variables.

[W8] <http://www.terra.es/personal/jftjft/Home.htm>

Página completa sobre todo lo relacionado con las matemáticas. Aparecen matemáticos famosos y aplicaciones de las matemáticas a diversos campos.