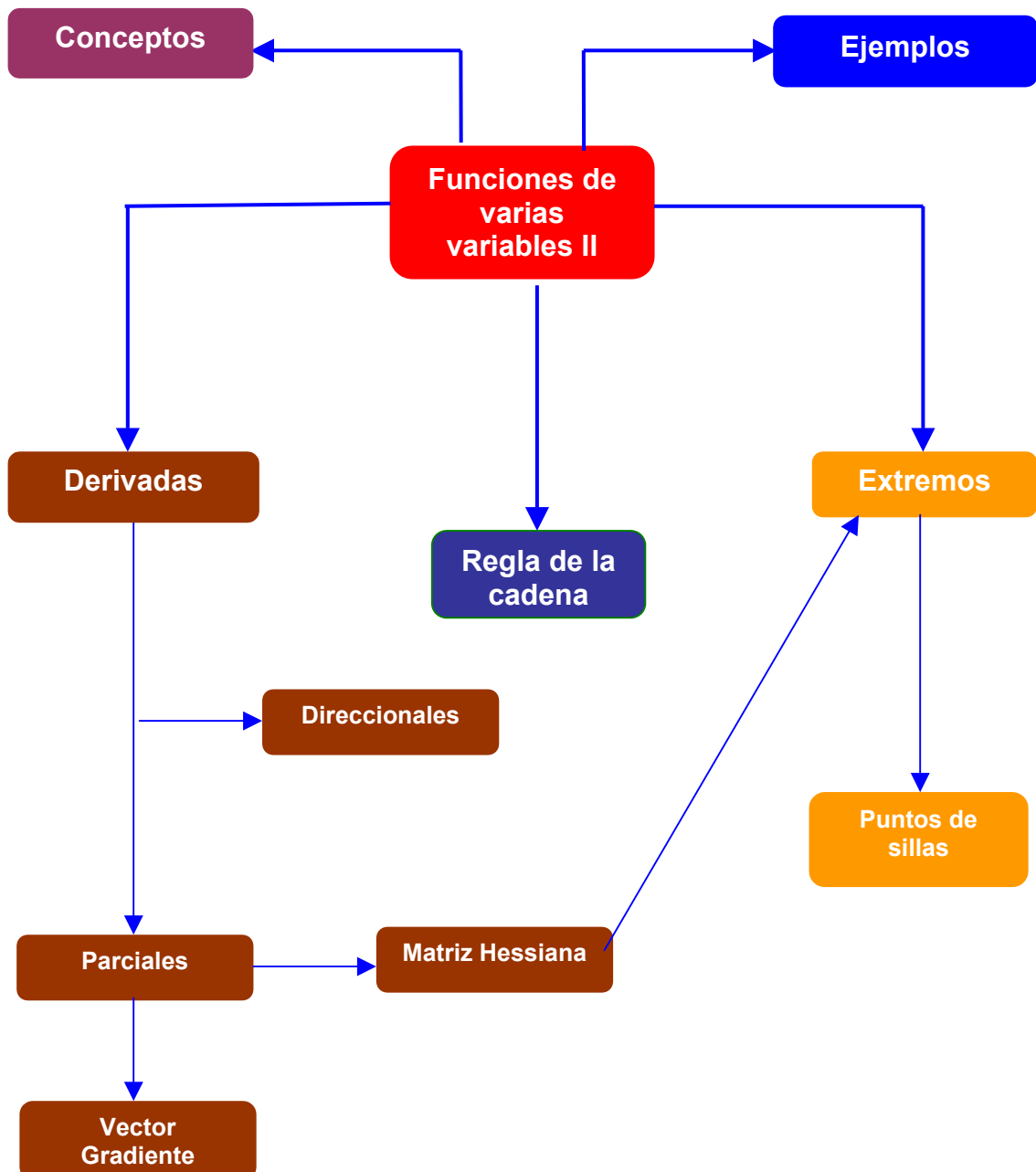


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II

Autores: Paco Martínez (jmartinezbos@uoc.edu), Patrici Molinàs (pmolinas@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Este Mathblock está dedicado a extender a funciones de más de una variable los conceptos de derivabilidad, regla de la cadena y extremos que ya hemos visto en una dimensión en bloques anteriores.

Ya hemos visto en el block anterior ejemplos de magnitudes que se describen mediante funciones de varias variables y sus representaciones en tres dimensiones.

También hemos introducido nociones topológicas necesarias para definir el concepto de distancia, que nos permite definir bolas, entornos, conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conjuntos compactos y puntos de acumulación y con todo ello los conceptos de límite y continuidad.

Nos queda por ver la derivabilidad y sus aplicaciones. Después de introducir el concepto de derivadas parciales de orden superior a 1, estudiaremos el carácter de los extremos locales de una función (máximos, mínimos y puntos silla) a partir de la matriz de las derivadas parciales segundas o matriz hessiana.

OBJETIVOS

1. Entender la extensión de los conceptos de diferenciación y regla de la cadena para funciones de varias variables.
2. Conocer los conceptos de derivada direccional y derivada parcial.
3. Utilizar la regla de la cadena para diferenciar funciones compuestas.
4. Aprender a encontrar de manera analítica la solución de problemas de extremos.
5. Aplicar correctamente el criterio de las derivadas parciales segundas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Para poder seguir con éxito esta unidad es recomendable haberse leído los siguientes Mathblocks: Uso básico del Mathcad, Funciones de una variable, Límites de funciones, Continuidad, Derivación, Estudio local y representación gráfica en 2D y Funciones de varias variables I.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

□ Definición de derivabilidad en varias variables.

Dada una función $f(x)$, un punto $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ y un vector director $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, se define la **derivada direccional** de f en x^0 y en la dirección v como:

$$f'_v(x^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + t \cdot v) - f(x^0)}{t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + t \cdot v_1, x_2^0 + t \cdot v_2, \dots, x_n^0 + t \cdot v_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{t}$$

La **derivada parcial** de una función f en un punto $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ y respecto a la i -ésima componente es la derivada direccional en el punto y y en la dirección del vector $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. La derivada parcial se denota de las siguientes maneras:

$$f'_{e_i}(x^0) = D_i f(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$$

PROPIEDAD: Si las derivadas parciales existen y son continuas, entonces la función inicial f es continua.

El **vector gradiente** de una función real f en un determinado punto x es el vector formado por todas las derivadas parciales:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Ejemplo: Veamos el vector gradiente de la función $\frac{xy}{x^2 + y^2}$. También calcularemos en qué puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el módulo de dicho vector es máximo y mínimo.

Solución:

Las componentes x y y del gradiente vienen dadas por:

$$(\nabla f)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(\nabla f)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Así pues el gradiente corresponde a :

$$\nabla f = \left(\frac{y(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

y su módulo:

$$\begin{aligned} \|\nabla f\| &= \sqrt{\frac{y^2(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{x^2(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^4}} = \\ &= \sqrt{\frac{(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}} = \sqrt{\frac{(x^2 - y^2)^2}{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

En los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el módulo del gradiente valdrá:

$$\|\nabla f\| = |2x^2 - 1|$$

y el valor máximo, 1, lo tomará en $(x, y) = (1, 0)$, $(x, y) = (-1, 0)$, $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (0, -1)$.

El valor mínimo del módulo del gradiente para puntos de la circunferencia es 0, este valor se obtiene en $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

La **aproximación lineal** a una función real f en un entorno del punto $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) \approx f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot (x - x^0)$$

es decir:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\approx f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_2 - x_2^0) + \dots \\ &\dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_n - x_n^0) \end{aligned}$$

Si una vez obtenida la derivada parcial i -ésima de una función f , volvemos a derivar respecto a la j -ésima componente, se obtiene una **derivada parcial de segundo orden**, la cual denotaremos por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Esta expresión se lee "derivada segunda de f respecto de x_i y respecto de x_j ".

La matriz formada por todas las derivadas parciales de segundo orden se llama **matriz hessiana**. La construcción de esta matriz se hace según el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{cccc}
 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 x_1 \rightarrow & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right. & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \right) \\
 x_2 \rightarrow & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 x_n \rightarrow & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}
 \end{array}$$

PROPIEDAD (Teorema de Schwartz): La matriz hessiana siempre es **simétrica** si las derivadas parciales de segundo orden son continuas.

□ **Regla de la cadena.**

La **regla de la cadena** para funciones de varias variables tiene dos versiones diferentes según la forma en que se realiza la composición (nos centramos en funciones de dos variables):

- Una función de dos variables f compuesta con otra de una variable h :

$$\begin{array}{ccccc}
 g = h \circ f : & R^2 & \rightarrow & R & \rightarrow & R \\
 & (x, y) & \rightarrow & f(x, y) & \rightarrow & h(f(x, y)) = g(x, y)
 \end{array}$$

Si queremos calcular, por ejemplo, las derivadas parciales de g (g es una función real de dos variables) a partir de las funciones h y f , podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = h'(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = h'(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

- Dos funciones de una variable, u y v , compuestas con otra de dos variables f :

$$\begin{array}{ccccc}
 g : & R & \rightarrow & R^2 & \rightarrow & R \\
 & p & \rightarrow & (u(p), v(p)) & \rightarrow & f(u(p), v(p)) = g(p)
 \end{array}$$

Si queremos calcular la derivada de la función g (observar que esta función es una función real de una única variable real) a partir de las funciones u , v y f , deberemos seguir los siguientes pasos:

$$g'(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(p), v(p)) \cdot u'(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(p), v(p)) \cdot v'(p)$$

Ejemplo: Supongamos que las variables x e y dependen de otra variable t de la siguiente forma

$$x(t) = t + e^t \qquad e \qquad y(t) = t^2 + t + 1$$

Calcularemos la derivada de la función $f(x,y) = y/x$ respecto de la variable t .

Solución:

Observar que tenemos la siguiente situación: $g(t) = f(x(t),y(t))$ y que lo que nos piden es, precisamente, calcular la derivada de g respecto de t . Según una de las fórmulas de la regla de la cadena, tenemos que:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

Calculemos por tanto cada uno de los elementos que hay en la expresión anterior:

- Parcial de f respecto de x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) = -\frac{y(t)}{x(t)^2} = -\frac{t^2 + t + 1}{(t + e^t)^2}$$

- Derivada de x respecto de t : $x'(t) = 1 + e^t$

- Parcial de f respecto de y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) = \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{t + e^t}$$

- Derivada de y respecto de t : $y'(t) = 2t + 1$

Finalmente, uniendo todas las expresiones anteriores, obtenemos que:

$$g'(t) = -\frac{t^2 + t + 1}{(t + e^t)^2} \cdot (1 + e^t) + \frac{1}{t + e^t} \cdot (2t + 1) = \frac{-t^2 e^t + t e^t + t^2 - 1}{(t + e^t)^2}$$

□ Definición de extremos de funciones de varias variables.

Una función f definida en un dominio D abierto presenta un **mínimo (máximo) local** en $(a,b) \in D$ si existe un entorno U de (a,b) tal que $f(x,y) \geq f(a,b) \quad \forall (x,y) \in U$ ($f(x,y) \leq f(a,b)$). Diremos (a,b) es un **extremo local o relativo** de f si es un mínimo o máximo local.

El punto $(a,b) \in D$ abierto, es un **punto crítico** de $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si f es diferenciable en (a,b) [i.e: f continua y con derivadas parciales en (a,b)] y $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

TEOREMA

Si f es diferenciable en el punto $(a,b) \in D$ abierto y además dicho punto es un extremo local, entonces (a,b) es un **punto crítico** de f ; i.e: $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

Este teorema pone de manifiesto que para encontrar extremos locales sólo tenemos que determinar los puntos críticos. Un punto crítico que no es un extremo local se denomina **punto de silla**.

CRITERIO DE LAS DERIVADAS PARCIALES SEGUNDAS

Sea (a,b) punto crítico de f una función y sean $d_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ y d_2 el determinante de la matriz Hessiana evaluada en (a,b) . Entonces:

- 1) Si $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$, se deduce que (a,b) es un mínimo local.
- 2) Si $d_1 < 0$ y $d_2 > 0$, se deduce que (a,b) es un máximo local.
- 3) Si $d_2 < 0$, se deduce que (a,b) es un punto de silla.
- 4) Si $d_2 = 0$, el criterio no es decisivo.

Ejemplo: Dada la función de dos variables $f(x, y) = -2x^2 + 2yx - 2y^2 + 100$

- (a) Calculad las derivadas parciales de la función.
- (b) En caso de existir, calculad los máximos y mínimos locales de la función.

Solución:

(a) Las derivadas parciales son: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x + 2y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 4y$

(b) Igualando las anteriores derivadas a cero, obtenemos que el único candidato a máximo o mínimo es $(x,y) = (0,0)$. Para ver si es máximo o mínimo local calculamos la Hessiana:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow d_2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

Dado que $d_1 = f_{xx}(0,0) = -4 < 0$ y $d_2 = 16 - 4 = 12 > 0$, el punto $(0,0)$ es un máximo local de la función.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

□ Ejemplo de cálculo de derivadas parciales:

Si $u = \arctg(y/x)$ y $v(t,x) = A \sin(a\lambda t + \psi) \sin(\lambda x)$ demostrad que se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Efectuemos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\arctg(y/x)) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-y}{x^2 + y^2} \right] = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\arctg(y/x)) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Y por lo tanto se satisface la ecuación de salida.

Comprobemos este resultado con Mathcad utilizando la operación simbólica de derivación múltiple así como la instrucción de simplificación que ya hemos venido utilizando.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\operatorname{atan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) &\rightarrow 2 \cdot \frac{y}{x^3 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)} - 2 \cdot \frac{y^3}{x^5 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)^2} \text{ simplify } \rightarrow 2 \cdot y \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{d^2}{dy^2} \left(\operatorname{atan} \left(\frac{y}{x} \right) \right) &\rightarrow \frac{-2}{x^3 \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right)^2} \cdot y \text{ simplify } \rightarrow -2 \cdot y \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Para la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} (A \sin(a\lambda t + \psi) \sin(\lambda x)) \right] = \\ &= A a \lambda \sin(\lambda x) \frac{\partial}{\partial t} [\cos(a\lambda t + \psi)] = -A a^2 \lambda^2 \sin(\lambda x) \sin(a\lambda t + \psi) \end{aligned}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (A \sin(a\lambda t + \psi) \sin(\lambda x)) \right] =$$

$$= Aa^2 \lambda \sin(a\lambda t + \psi) \frac{\partial}{\partial x} [\cos(\lambda x)] = -Aa^2 \lambda^2 \sin(\lambda x) \sin(a\lambda t + \psi)$$

Las dos expresiones son iguales y queda probada la ecuación de salida.

Con la ayuda de Mathcad, podemos comprobar la exactitud del resultado:

$$\frac{d^2}{dt^2} (A \cdot \sin(a \cdot \lambda \cdot t + \psi) \cdot \sin(\lambda \cdot x)) \rightarrow -A \cdot \sin(a \cdot \lambda \cdot t + \psi) \cdot a^2 \cdot \lambda^2 \cdot \sin(\lambda \cdot x)$$

$$a^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} (A \cdot \sin(a \cdot \lambda \cdot t + \psi) \cdot \sin(\lambda \cdot x)) \right] \rightarrow -a^2 \cdot A \cdot \sin(a \cdot \lambda \cdot t + \psi) \cdot \sin(\lambda \cdot x) \cdot \lambda^2$$

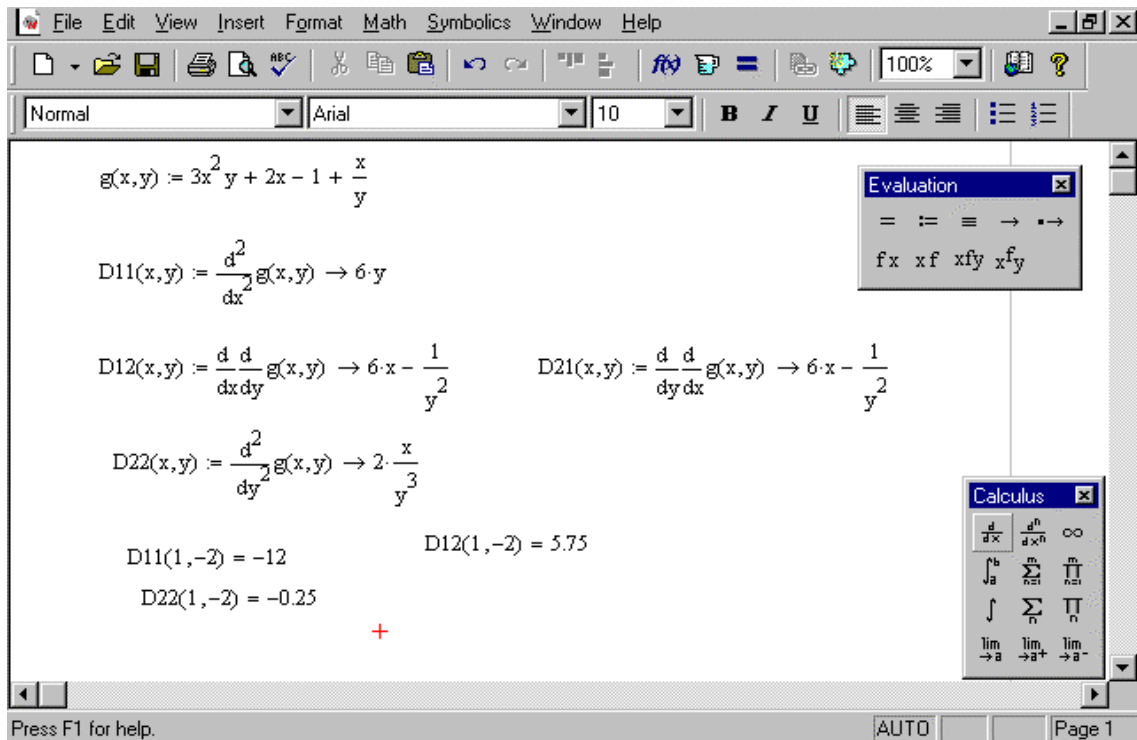
□ Ejemplo de cálculo de la matriz Hessiana:

Calcular la matriz hessiana, en un punto cualquiera (x,y), de la función:

$$g(x, y) = \frac{x}{y} + 3x^2y + 2x - 1$$

Encontrar esta matriz para (x,y) = (1,-2) y comprobar que, efectivamente se cumple el teorema de Schwarz (es decir, que la matriz hessiana es simétrica).

Mathcad calcula derivadas parciales de segundo orden:



The screenshot shows the Mathcad interface with the following content:

- Function definition: $g(x, y) := 3x^2y + 2x - 1 + \frac{x}{y}$
- Second-order partial derivatives:
 - $D11(x, y) := \frac{d^2}{dx^2} g(x, y) \rightarrow 6 \cdot y$
 - $D12(x, y) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} g(x, y) \rightarrow 6 \cdot x - \frac{1}{y^2}$
 - $D21(x, y) := \frac{d}{dy} \frac{d}{dx} g(x, y) \rightarrow 6 \cdot x - \frac{1}{y^2}$
 - $D22(x, y) := \frac{d^2}{dy^2} g(x, y) \rightarrow 2 \cdot \frac{x}{y^3}$
- Values at the point (1, -2):
 - $D11(1, -2) = -12$
 - $D12(1, -2) = 5.75$
 - $D22(1, -2) = -0.25$
 - $D21(1, -2) = 5.75$

La matriz hessiana en un punto cualquiera (x,y) estará formada por las siguientes derivadas segundas:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y & -\frac{1}{y^2} + 6x \\ -\frac{1}{y^2} + 6x & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

Esta matriz, en el punto (1,-2), valdrá lo siguiente (observar que esta matriz es simétrica):

$$H = \begin{pmatrix} -12 & 23/4 \\ 23/4 & -2/8 \end{pmatrix}$$

□ **Ejemplo de función de tres variables:**

De la siguiente función real de tres variables, $f(x,y,z) = x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$, se pide lo siguiente:

- Calcular las derivadas parciales en un punto cualquiera (x,y,z) . ¿Qué podemos decir de la continuidad de la función dada?
 - ¿Es cierto que si una función es continua, cualquier límite direccional en un punto siempre dará lo mismo? Comprobadlo con la función inicial y con el punto $(x,y,z) = (1,0,-1)$.
 - A partir del apartado (a), encontrad el gradiente en el punto $(-2,3,2)$ y la aproximación lineal en este punto. Comparar la imagen del punto $(-2.1,3.1,2.1)$ con la que da la aproximación lineal.
- (a) Dado que es una función de 3 variables, habrá 3 derivadas parciales. Generalizando la metodología de cálculo de derivadas parciales, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

Como cada una de las derivadas parciales es una función continua (son la suma de funciones continuas) que existe para cualquier punto (x,y,z) , tenemos que la función inicial f es una función continua.

- Si una función es continua en un punto, eso significa que, en particular, el límite en el punto existe. Es decir, sea cual sea la trayectoria con que nos aproximamos al punto, el límite siempre ha de valer lo mismo. Eso también ha de pasar cuando nos aproximemos al punto por rectas (límites direccionales o por secciones verticales). Como la función

inicial f es continua, comprobamos este hecho para el punto $(1,0,-1)$ tomando una dirección cualquiera $v = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(1 + t \cdot v_1, 0 + t \cdot v_2, -1 + t \cdot v_3) =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t \cdot v_1) \cdot (t \cdot v_2) + (t \cdot v_2) \cdot (-1 + t \cdot v_3) + (1 + t \cdot v_1) \cdot (-1 + t \cdot v_3) =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t \cdot v_2 + t^2 \cdot v_1 \cdot v_2 - t \cdot v_2 + t^2 \cdot v_2 \cdot v_3 - 1 - t \cdot v_1 + t \cdot v_3 + t^2 \cdot v_1 \cdot v_3) = -1$$

Observar que el resultado final es independiente del valor que tenga el vector v .

- (c) El vector gradiente está formado por las derivadas parciales, por tanto, a partir de los resultados del apartado (a):

$$\nabla f(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$$

y, en el punto $(-2, 3, 2)$, tendremos lo siguiente:

$$\nabla f(-2, 3, 2) = (3+2, -2+2, -2+3) = (5, 0, 1)$$

La aproximación lineal en el punto vendrá dada por la siguiente expresión:

$$f(x, y, z) \approx f(-2, 3, 2) + \nabla f(-2, 3, 2) \cdot (x - (-2), y - 3, z - 2)$$

$$f(x, y, z) \approx -4 + (5, 0, 1) \cdot (x + 2, y - 3, z - 2)$$

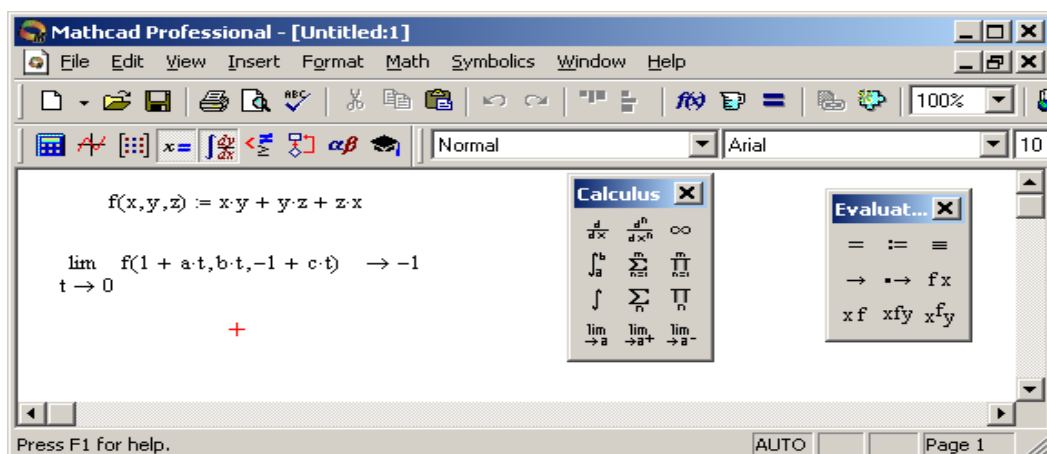
$$f(x, y, z) \approx -4 + 5 \cdot (x + 2) + 0 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 2)$$

y, finalmente:

$$f(x, y, z) \approx 5x + z + 4$$

Si calculáis la imagen del punto $(-2.1, 3.1, 2.1)$ a partir de la función inicial f obtendréis que $f(-2.1, 3.1, 2.1) = -4.41$. Con la aproximación lineal que hemos encontrado antes, obtendréis el valor: $f(-2.1, 3.1, 2.1) \approx 5 \cdot (-2.1) + 2.1 + 4 = -4.4$ (que efectivamente es una buena aproximación al valor verdadero).

Mathcad también calcula el límite en una dirección (a,b,c):



□ **Ejemplos de máximos y mínimos:**

a) Dada la función $f(x,y) = x^2 + y^4$, encontrar los máximos y mínimos de esta función. Dibuja la función con el Mathcad.

En primer lugar, hemos de plantear las condiciones de primer orden que saldrán de las dos derivadas parciales:

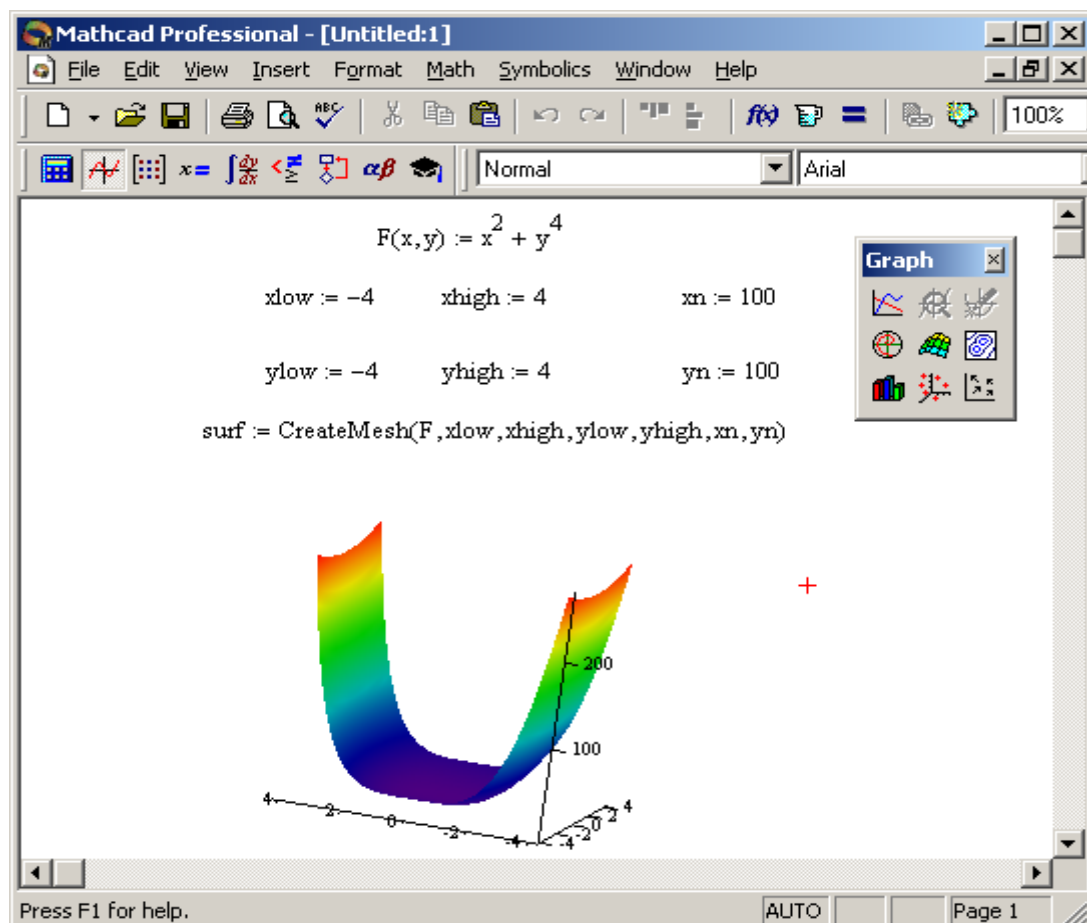
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 = 0$$

Lo que implica que el candidato a máximo o mínimo de esta función es $(x,y) = (0,0)$.

Para discutir si el candidato es máximo o mínimo, hemos de considerar las condiciones de segundo orden a partir de la matriz hessiana.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, el criterio de las derivadas parciales segundas para determinar extremos falla. En este caso hacemos el gráfico y vemos que el punto $(0,0)$ es un mínimo local de la función, que además es global. Haciendo el dibujo con el Mathcad, se aprecia el mínimo.



b) Dibuja la función $\frac{1}{1+x^2y^2}$ y averigua a partir de representaciones gráficas con Mathcad:

Máximos y mínimos, absolutos y relativos, de dicha función.

Direcciones de máximo crecimiento o decrecimiento alrededor de (0,0).

Primero representamos su imagen tridimensional:

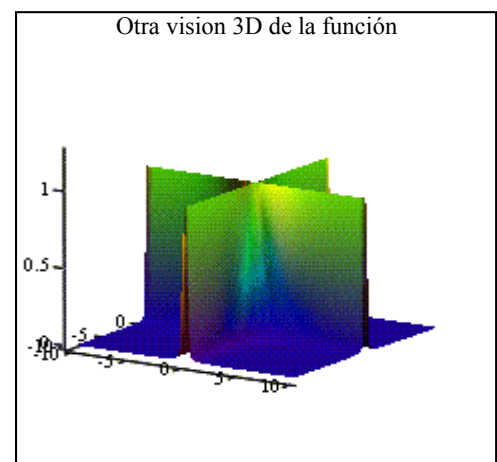
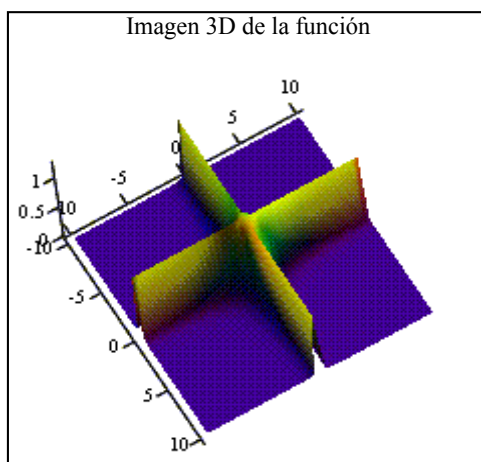
$$F(x, y) := \frac{1}{1 + x^2 y^2}$$

xlow := -10 xhigh := 10

ylo := -10 yhigh := 10

xn := 40 yn := 40

surf := CreateMesh (F, xlow, xhigh, ylow, yhigh, xn, yn)



y luego sus líneas de nivel:

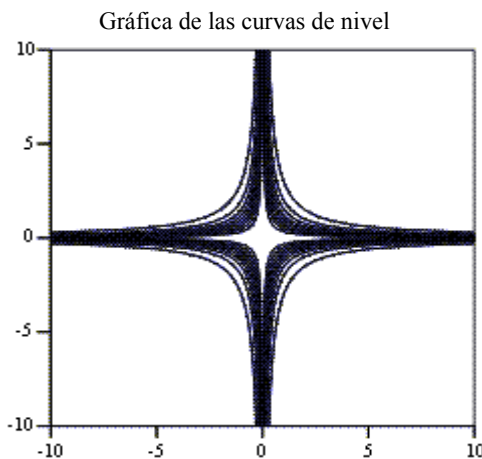
$$F(x, y) := \frac{1}{1 + x^2 y^2}$$

xlow := -10 xhigh := 10

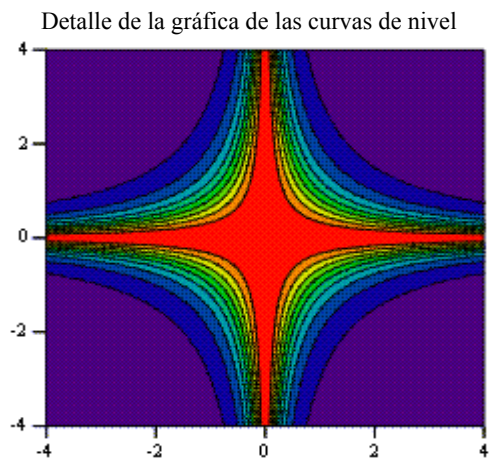
ylo := -10 yhigh := 10

xn := 400 yn := 400

surf := CreateMesh (F, xlow, xhigh, ylow, yhigh, xn, yn)



surf



surf

A la luz de estos datos podemos afirmar que en los ejes x e y la función presenta el valor máximo: 1. Y por lo tanto, dichos ejes son máximos absolutos de la función. No obstante, estos puntos no son máximos relativos de la función puesto que en su entorno, existen otros puntos de igual imagen. Las direcciones de máximo decrecimiento alrededor del punto $(0,0)$ son las dadas por las bisectrices $y = x$ y $y = -x$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Benker, H. (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc.
- [2] Moreno, J.A.; Ser, D. (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A.
- [3] Agulió, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1991): "Temes clau de càlcul". Barcelona: UPC.
- [4] Courant, R.; John, F. (1971): "Introducción al cálculo y al análisis matemático". México: Limusa.
- [5] Vaquero, A.; Fernández, C. (1987): "La Informática Aplicada a la Enseñanza". Eudema S.A. Madrid.P 37.
- [6] Ortega J. (1990): "Introducció a l'anàlisi matemática". Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.
- [7] Tang, S. (1986): "Applied Calculus". PWS Publishers.
- [8] Burbulla, D.(1993): "Self-Tutor for Computer Calculus Using Maple". Prentice Hall.
- [9] Hunt, R. (1994): "Calculus". Ed. Harper Collins.

ENLACES

[W1] <http://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/dif.html>

Página web donde se extiende el concepto de derivada a funciones de varias variables. Está la teoría con ejemplos.

[W2] <http://www.okmath.com/Catego3.asp?clave=231>

Página web con problemas resueltos sobre Diferenciabilidad de Funciones de Varias Variables.

[W3] <http://planetmath.org/encyclopedia/Differentiable.html>

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre diferenciabilidad. También se pueden buscar en <http://planetmath.org/encyclopedia> otros conceptos como límites, por ejemplo, dándole a la letra L. Está en inglés.

[W4] <http://www.satd.uma.es/matap/svera>

Página web de Salvador Vera Ballesteros, profesor del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad de Málaga. Contiene problemas y apuntes sobre funciones de varias variables.

[W5] <http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/calculo.html>

Página web que trata sobre un curso de cálculo diferencial. Se introduce el concepto de funciones de varias variables y el de derivación parcial. Conceptos muy útiles en las aplicaciones. Hay teoría y ejercicios.

[W6] <http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/calculo/grupo13m/>

Página web del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad politécnica de Madrid. Contiene ejercicios y exámenes sobre funciones de varias variables.

[W7] <http://www.uco.es/organiza/departamentos/quimica-fisica/quimica-fisica/CD/CD0.htm>

Página web que trata sobre un curso de aprendizaje de Mathcad. Hay ejemplos sobre funciones de varias variables.

[W8] <http://www.terra.es/personal/jftjft/Home.htm>

Página completa sobre todo lo relacionado con las matemáticas. Aparecen matemáticos famosos y aplicaciones de las matemáticas a diversos campos.