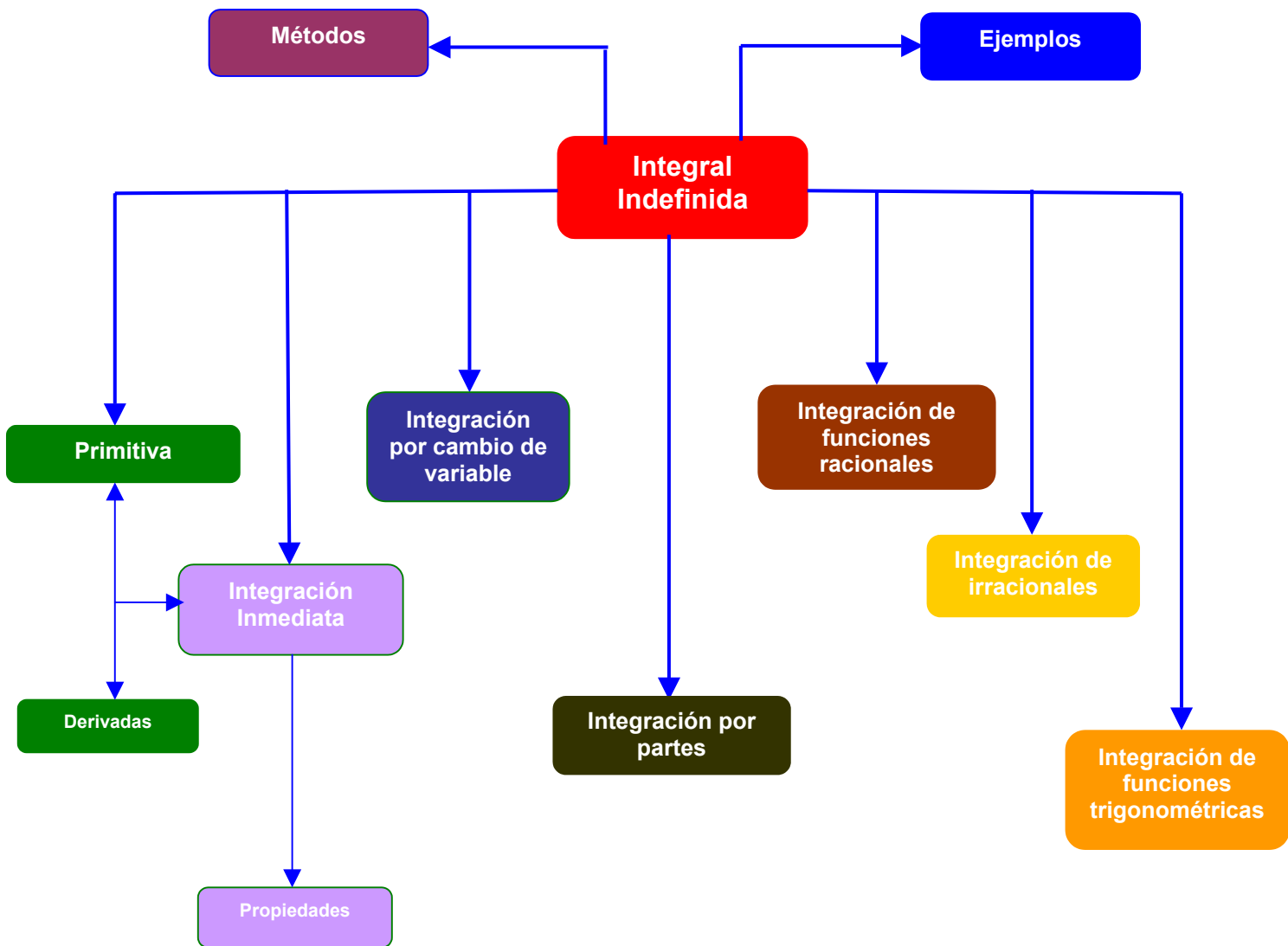


LA INTEGRAL INDEFINIDA

Autores: Paco Martínez (jmartinezbos@uoc.edu), Patrici Molinàs (pmolinas@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

En este *math-book* trataremos el problema inverso de hallar la **derivada** de una función: calcular una **primitiva** de la misma. Aunque se sabe que cualquier función continua tiene primitiva, no existen fórmulas, ni métodos, para calcular éstas con exactitud más que unos pocos casos.

El objeto de este tema es exponer algunos de dichos métodos, y su importancia se notará en el capítulo de la Integral definida y sus aplicaciones, donde veremos la relación que hay entre el área y la integral definida y la regla de Barrow, conexión entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Calcularemos integrales indefinidas de todo tipo: inmediatas, mediante cambio de variable, por partes, integración de funciones racionales, irracionales y trigonométricas.

OBJETIVOS

1. Conocer y aplicar el concepto de primitiva de una función.
2. Ver la integral como la operación inversa de derivar.
3. Calcular integrales inmediatas, aplicando las propiedades de las primitivas.
4. Transformar una integral en otra más sencilla haciendo un cambio de variable.
5. Hallar integrales por el método de integración por partes.
6. Saber utilizar las funciones racionales y el método de integración derivado de ellas, descomponiendo dichas funciones en fracciones simples, cuyas integrales son inmediatas.
7. Calcular integrales irracionales y trigonométricas eligiendo el cambio de variable adecuado.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

A fin de poder aprovechar al máximo esta unidad es recomendable tener conocimientos básicos sobre funciones de una variable, derivación y uso del programa Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

□ Concepto de Primitiva

Sea I un intervalo abierto, y f una función definida en I . Una **primitiva** de f en I es una función, F , continua en I que verifica: $F'(x) = f(x) \forall x \in I$. Luego todas las primitivas de f son del tipo $G(x) = F(x) + C$, siendo C una constante cualquiera, pues $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$.

El conjunto formado por todas las primitivas de f se llama **integral indefinida de f** , y se designa por $\int f(x) dx$ (se lee integral de $f(x)$ diferencial de x). Luego, escribiremos

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Ejemplo: $\int 3x^2 dx = x^3 + c$, ya que $F(x) = x^3$; $F'(x) = 3x^2 = f(x)$

Una primitiva de $f(x) = 1 + \cos x$ es $F(x) = x + \sin x$. Añadiendo constantes, obtenemos más primitivas

□ Integración inmediata

A las primitivas que resultan aplicando en modo inverso las fórmulas de derivación se les llama **integrales inmediatas**.

El recuerdo del cuadro de las derivadas de las funciones fundamentales, así como la regla de derivación de una función de función, nos van a permitir recordar una tabla de integrales inmediatas, cuyo uso se hace imprescindible:

$\int dx = x + c$	$\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = -L \cos x + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = L \operatorname{sen} x + c$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$	$\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$
$\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + c$	$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + c$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$\int \frac{dx}{x} = L x + c$	$\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccosec} x + c$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arc} \sec x + c$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c$	$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \cot x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctan} x + c$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos} x + c$	

Propiedades:

Veamos a continuación las propiedades que verifican las integrales indefinidas, que son consecuencia inmediata de la definición de primitiva y de las propiedades de las derivadas.

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad \forall k \in R$
- $\int (k_1 f(x) + k_2 g(x)) dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx \quad \forall k_1, k_2 \in R$

Ejemplo:

$$\int (5x^3 - 2 \cos x + 3e^x) dx = 5 \int x^3 dx - 2 \int \cos x dx + 3 \int e^x dx = \frac{5x^4}{4} - 2 \sin x + 3e^x + c$$

□ **Integración por cambio de variable**

Una técnica para encontrar primitivas tiene la regla de la cadena como base. La regla de la cadena nos indica que si tenemos una función $f(t)$ que sabemos integrar, y, en lugar de t ponemos alguna otra función de x , $t = g(x)$, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

Después integramos con respecto a t y, ya para acabar, deshacemos el cambio.

Se trata de transformar una integral en otra más sencilla haciendo un cambio de variable adecuado.

Ejemplo: Calcular $\int \frac{\sin(3x+5)}{1+\cos(3x+5)} dx$

Solución:

Podemos mejorar muchísimo el aspecto de esta integral efectuando el siguiente cambio de variable: $t = \cos(3x+5)$ que conlleva $dt = -3\sin(3x+5)dx$. Substituyendo ambas expresiones podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(3x+5)}{1+\cos(3x+5)} dx &= \frac{-1}{3} \int \frac{-3\sin(3x+5)}{1+\cos(3x+5)} dx = \\ &= \frac{-1}{3} \int \frac{1}{1+t} dt = \frac{-1}{3} \int \frac{1}{1+t} dt = \frac{-1}{3} \ln|1+t| + c \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{\sin(3x+5)}{1+\cos(3x+5)} dx = \frac{-1}{3} \ln|1+\cos(3x+5)| + c$$

□ **Integración por partes**

Este método se basa en la fórmula

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

cuya deducción es trivial a partir de la regla de derivación de un producto.

Ejemplo: Calcular $\int e^{2x} \sin x dx$

Solución:

Aplicaremos integración por partes, con $f(x) = \sin x$, $g'(x) = e^{2x}$.

$$\text{Así: } f'(x) = \cos x, \quad g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \quad \text{e} \quad I = \int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x dx.$$

Aplicando de nuevo integración por partes, tomando $g'(x) = e^{2x}$, $f(x) = \cos x$ tenemos $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, $f'(x) = -\sin x$ quedando:

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x} \sin x dx = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{2x} \cos x - \frac{1}{4}I \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } I = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{2x} \cos x - \frac{1}{4}I \Rightarrow \frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{2x} \cos x$$

$$\text{Despejando } I, \text{ se tiene que } I = \frac{1}{5}e^{2x} (2 \sin x - \cos x)$$

□ Integración de funciones racionales

Una función racional tiene la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Sabemos que

si grado de $P(x) \geq$ grado de $Q(x)$, entonces podemos dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ obteniendo:

$P(x) = C(x)Q(x) + R(x)$, siendo $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto, además $R(x) = 0$, o bien, grado $R(x) <$ grado $Q(x)$. Así:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \right] dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

La primera integral es polinómica, luego inmediata. La segunda integral vale cero (si $R(x) = 0$), o grado $R(x) <$ grado $Q(x)$, en cuyo caso $Q(x)$ se puede descomponer en factores irreducibles (según un teorema del álgebra), es decir, por medio de sus raíces.

Según otro teorema algebraico, la fracción $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer en suma de fracciones de coeficientes irreducibles. Veamos todo esto con un ejemplo.

Ejemplo: Calcular $\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx$

Solución:

Como el grado del numerador es igual al del denominador, procederemos —antes de integrar— a dividir x^4 entre $x^4 - 1$ siendo 1 el cociente obtenido y 1 el resto:

$$\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx = \int \left[1 + \frac{1}{x^4 - 1} \right] dx = \int dx + \int \frac{1}{x^4 - 1} dx =$$

Mientras que la primera integral es inmediata, la segunda requiere descomponer la fracción en suma de fracciones de coeficientes irreducibles:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x^2 + 1}$$

Resolviendo la ecuación anterior, determinamos que

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2 + 1}$$

Retomando la integral:

$$= x - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx =$$

$$= x - \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \arctg x + c =$$

$$= x - \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \arctg x + c =$$

y simplificando:

$$= x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctg x + c$$

Veremos en los casos prácticos con software como el Mathcad puede, además de calcular la integral directamente, hacer la descomposición, en fracciones simples, por nosotros.

□ Integración de funciones irracionales

Las integrales del tipo $\int R(x, \sqrt[p]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n}, \dots, \sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}) dx$, (R cociente entre expresiones) y p, \dots, s naturales, se transforman en una racional si se hace el cambio $t^M = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$ siendo $M = m.c.m(p, \dots, s)$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx$

Solución:

Hagamos el cambio $t^6 = x+2$ con lo que: $t = (x+2)^{1/6}$ y $dx = 6t^5 dt$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx = \int \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = \int \frac{6t^3}{t+1} dt$$

Tenemos una función racional. Como el grado del numerador es mayor al del denominador, dividiremos $6t^3$ entre $t+1$ siendo $6t^2 - 6t + 6$ el cociente obtenido y -6 el resto:

$$\int \frac{6t^3}{t+1} dt = 6t^2 - 6t + 6 - \int \frac{6}{t+1} dt = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\text{Ln}|t+1| + C$$

Luego, deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx = 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\text{Ln}(1 + \sqrt[6]{x+2}) + C$$

□ Integración de funciones trigonométricas

Tipo $\int \sin^m x \cos^n x dx$ siendo m y n naturales y tipo $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (R cociente)

Se hace los cambios $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \text{tg} x$ ó $t = \text{tg}(x/2)$ según convenga.

Ejemplo: Calcular $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

Solución:

Dado que la derivada de $\cos x$ es $-\sin x$, efectuamos el siguiente cambio de variable: $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, obteniendo una integral inmediata:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = -\int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{2} + c_{(1)} = \frac{1}{2t^2} + c_{(1)} = \frac{1}{2\cos^2 x} + c_{(1)} \quad (1)$$

Para efectuar la integral mediante otro cambio de variable, nos fijamos que podemos rescribir la fracción de funciones trigonométricas de la siguiente forma:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\text{tg} x}{\cos^2 x} dx =$$

que deja entrever el interés de realizar también este otro cambio de variable: $t = \text{tg} x$ y

$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Con este cambio, la integral se convierte en inmediata:

$$= \int t dt = \frac{t^2}{2} + c_{(2)} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + c_{(2)} \quad (2)$$

Los resultados obtenidos en (1) y (2) no son formalmente iguales aunque equivalen realmente como veremos a continuación. Dividiendo la ecuación fundamental de la trigonometría por $\cos^2 x$ obtenemos:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Substituyendo $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ en el resultado obtenido en (2) obtenemos el resultado en

(1) menos $\frac{1}{2}$. Basta, pues, para comprender lo que sucede, redefinir la **constante arbitraria**

de la integración en (1) como la en (2) más $\frac{1}{2}$, es decir, $c_{(1)} = c_{(2)} - \frac{1}{2}$.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

❑ Ejemplos de integración inmediata y con cambio de variable

Calcular (a) $\int \frac{x^3 + 3\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}} dx$, (b) $\int \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx$

(a) Descomponiendo la integral en varios sumandos, según las propiedades de las integrales,

quedaría: $\int \frac{x^3 + 3\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^3}{x\sqrt{x}} dx + \int \frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx =$

$$\int x^{\frac{3}{2}} dx + 3 \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3 \ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5} x^2 \cdot \sqrt{x} + 3 \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

Las integrales resultantes, una vez simplificadas, son inmediatas.

(b) Realicemos la integración mediante cambio de variables (expresado en los cálculos siguientes entre llaves):

$$\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^{-x} \equiv u \\ -e^{-x} dx = du \end{array} \right\} = \int \frac{-du}{u+1} = -\ln(u+1) + c = \left\{ u = e^{-x} \right\} = -\ln(e^{-x} + 1) + c$$

Con el Mathcad:

The screenshot shows the Mathcad Professional interface. The main workspace contains the following mathematical expressions:

(a) $\int \frac{x^3 + 3\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}} dx \rightarrow \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + 3 \cdot \ln(x) - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$

(b) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx \rightarrow -\ln(\exp(-x) + 1)$

Two floating windows are visible:

- Calculator:** A standard scientific calculator interface. The square root symbol ($\sqrt{\quad}$) is circled in red.
- Evaluat...:** A window for evaluating functions. The function key ($f(x)$) is circled in red.
- Calculus:** A window for calculus operations. The integral symbol (\int) is circled in red.

The status bar at the bottom indicates "Press F1 for help.", "AUTO", and "Page 1".

□ Ejemplo de integración por partes

Calcular la integral $\int x^2 \ln x dx$

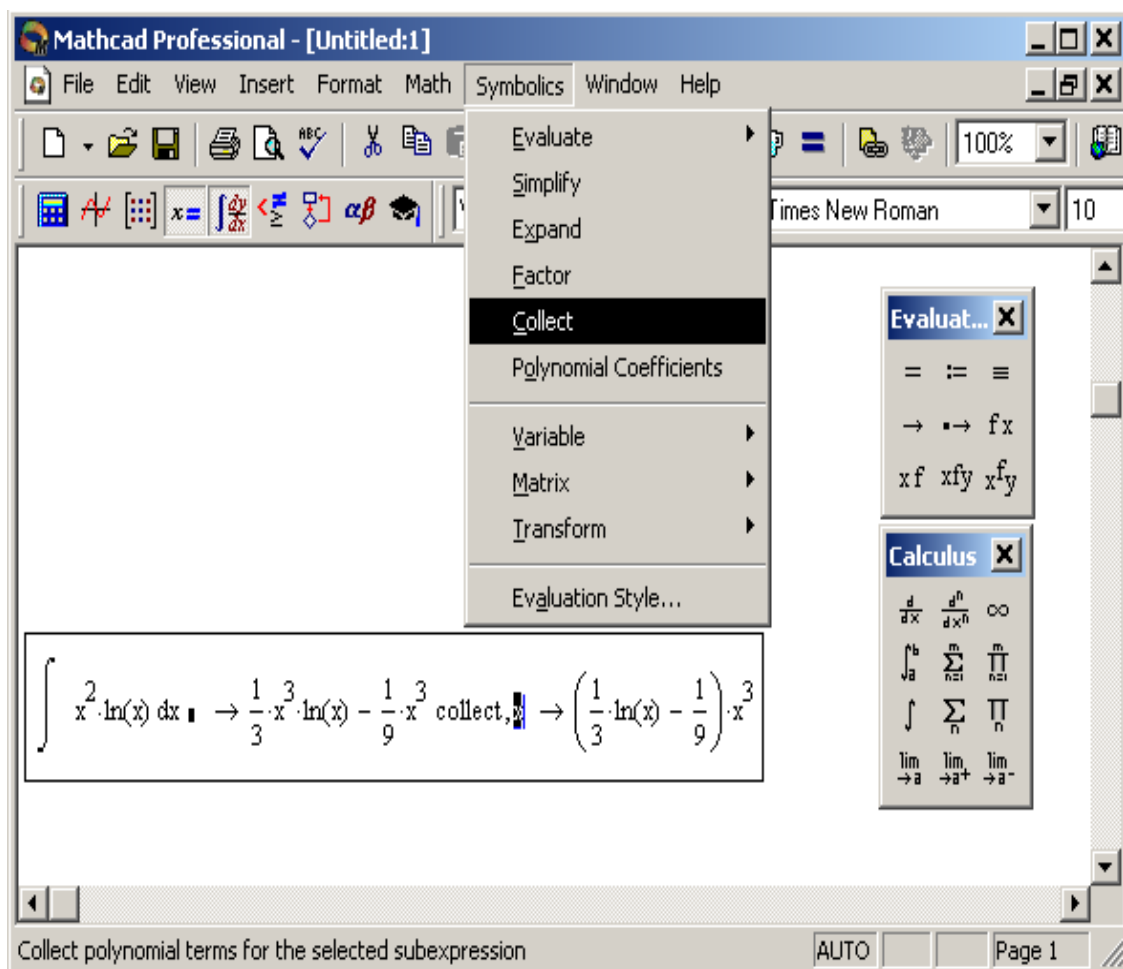
Sabiendo que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ y que $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$, parece razonable integrar por partes.

Tomemos $f(x) = \ln x$ y $g'(x) = x^2$ y entonces:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + c =$$

que, una vez simplificado, equivale a: $= \frac{x^3}{3} \left[\ln x - \frac{1}{3} \right] + c$.

Con el Mathcad, utilizando el comando simbólico **collect** para sacar factor común de la variable, quedaría así:



□ Ejemplo de integración de funciones racionales

Calcular (a) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$, (b) $\int \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx$

(a) Como el numerador no es de grado inferior al denominador, procederemos —antes de integrar— a dividir x^2 entre $x^2 + 1$ siendo 1 el cociente obtenido y -1 el resto:

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \left[1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right] dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x - \arctan x + c$$

(b) El integrando es función racional de e^x , luego haremos el cambio $t = e^x$, $dt = e^x dx$:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int \frac{dt}{t(t^2 + t - 2)}$$

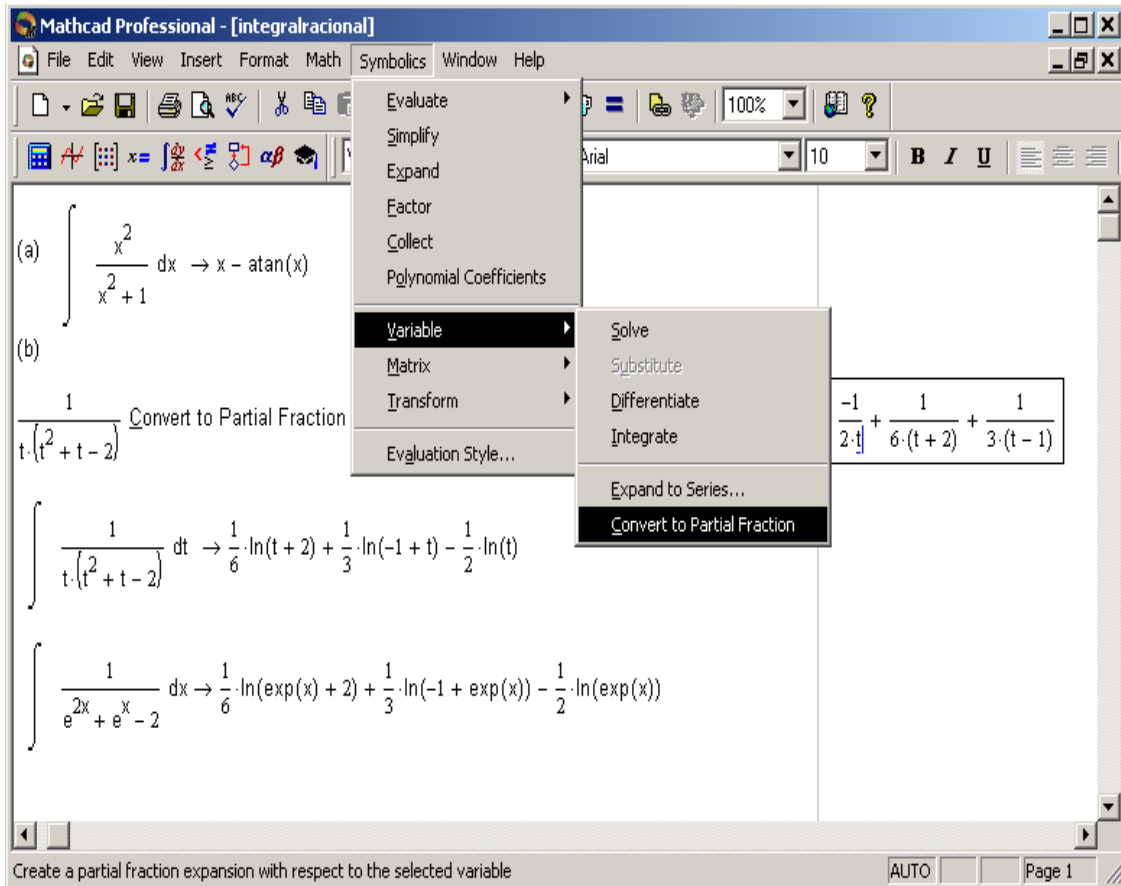
Ahora debe integrarse una función racional cuyo denominador se descompone en la forma $t(t^2 + t - 2) = t(t - 1)(t + 2)$ con lo que:

$$\frac{1}{t(t^2 + t - 2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t - 1} + \frac{C}{t + 2} = \frac{A(t - 1)(t + 2) + Bt(t + 2) + Ct(t - 1)}{t(t - 1)(t + 2)}$$

Resolviendo la ecuación anterior, determinamos que : $A = \frac{-1}{2}$; $B = \frac{1}{3}$; $C = \frac{1}{6}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t(t^2 + t - 2)} dt &= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t - 1} + \frac{C}{t + 2} \right) dt = \frac{-1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t - 1} + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t + 2} = \\ &= \frac{-1}{2} \ln|t| + \frac{1}{3} \ln|t - 1| + \frac{1}{6} \ln|t + 2| + c = \ln \frac{\sqrt[6]{t + 2} \cdot \sqrt[3]{t - 1}}{\sqrt{t}} + c = \ln \frac{\sqrt[6]{e^x + 2} \cdot \sqrt[3]{e^x - 1}}{\sqrt{e^x}} + c \end{aligned}$$

Con el Mathcad, utilizando el comando simbólico **convert to partial fraction** para hacer la descomposición en fracciones simples, quedaría así:



□ **Ejemplo de integración de funciones trigonométricas**

Calcular (a) $\int \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$, (b) $\int \cos^5 x \sin^m x dx$

(a) Podemos mejorar muchísimo el aspecto de esta integral efectuando el siguiente cambio de variable: $s = \cos(t)$ que conlleva $ds = -\sin(t)dt$. Substituyendo ambas expresiones podemos escribir:

$$\int \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = -\int \frac{ds}{1 + s^2} =$$

siendo esta última una integral inmediata. Por tanto:

$$= -\arctan(s) + C =$$

y –finalmente- deshaciendo el cambio, obtenemos:

$$= -\arctan(\cos(t)) + C$$

(b) Hagamos el cambio $t = \sin x$, entonces $dt = \cos x dx$. Así, tenemos que:

$\cos^5 x dx = (\cos^2 x)^2 dt = (1 - \sin^2 x)^2 dt = (1 - t^2)^2 dt$, con lo que:

$$\int \cos^5 x \sin^m x dx = \int (1 - t^2)^2 t^m dt = \int (t^m - 2t^{2+m} + t^{4+m}) dt =$$

$$= \frac{t^{m+1}}{m+1} - 2 \frac{t^{m+3}}{m+3} + \frac{t^{m+5}}{m+5} + C = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} - 2 \frac{\sin^{m+3} x}{m+3} + \frac{\sin^{m+5} x}{m+5} + C$$

The screenshot shows the Mathcad Professional interface with the following content:

- Calculus palette:** Contains symbols for differentiation ($\frac{d}{dx}$), integration (\int_a^b), summation ($\sum_{n=1}^m$), and limits ($\lim_{x \rightarrow a}$).
- Evaluation palette:** Contains symbols for assignment ($=$), equality (\equiv), and function application ($f(x)$).
- Integration results:**
 - $\int \frac{\sin(t)}{1 + (\cos(t))^2} dt \rightarrow -\text{atan}(\cos(t))$
 - $\int (\cos(x))^5 \cdot (\sin(x))^m dx \rightarrow \int \cos(x)^5 \cdot \sin(x)^m dx$ (No sabe resolverla)
 - $\int (\cos(x))^5 \cdot (\sin(x))^3 dx \rightarrow \frac{-1}{8} \cdot \sin(x)^2 \cdot \cos(x)^6 - \frac{1}{24} \cdot \cos(x)^6$
 - $\int (\cos(x))^5 \cdot (\sin(x))^5 dx \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot \sin(x)^4 \cdot \cos(x)^6 - \frac{1}{20} \cdot \sin(x)^2 \cdot \cos(x)^6 - \frac{1}{60} \cdot \cos(x)^6$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Benker, H. (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc.
- [2] Moreno, J.A.; Ser, D. (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A.
- [3] Agulió, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1991): "Temes clau de càlcul". Barcelona: UPC.
- [4] Courant, R.; John, F. (1971): "Introducción al cálculo y al análisis matemático". México: Limusa.
- [5] Vaquero, A.; Fernández, C. (1987): "La Informática Aplicada a la Enseñanza". Eudema S.A. Madrid.P 37.
- [6] Ortega J. (1990): "Introducció a l'anàlisi matemàtica". Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.
- [7] Tang, S. (1986): "Applied Calculus". PWS Publishers.
- [8] Burbulla, D.(1993): "Self-Tutor for Computer Calculus Using Maple". Prentice Hall.
- [9] Hunt, R. (1994): "Calculus". Ed. Harper Collins.

ENLACES

[W1] <http://www.xtec.es/~jlagares/manualwinfun.cat/extractemanualfuncionsperawindows.htm>

Página web sobre un artículo que ganó el segundo premio en el "concurso de programas educativos para ordenador", organizado por el M.E.C. en el año 1993. Trata sobre el programa "funciones para windows", e incluye ejemplos gráficos. Este programa es capaz de, además de calcular integrales, representar funciones, calcular los puntos de corte entre ellas, hallar el área que encierran, etc. Un programa muy completo, interesante y fácil de manejar.

[W2] <http://www.sectormatematica.cl/educsuperior.htm>

Página web con ejercicios sobre todos los aspectos que abarca la integración indefinida, desde las integrales inmediatas, hasta las trigonométricas e irracionales. La página está estructurada en una guía de ejercicios, un enlace para resolver integrales en línea (INTEGRATOR) y otros contenidos que trata.

[W3] <http://www.okmath.com/Catego2.asp?clave=11>

Página web con problemas resueltos, por nivel de dificultad, sobre integrales inmediatas, por partes y trigonométricas.

[W4] <http://planetmath.org/encyclopedia/IntegrationByParts.html>

Página web de la enciclopedia de PlanetMath.org sobre Integración por partes. También se pueden buscar en <http://planetmath.org/encyclopedia> otros conceptos como integral, etc.

[W5] <http://batllo.informatica.uma.es/matap/svera/docs/apuntesitt.html>

Página web de Salvador Vera Ballesteros, profesor del Departamento de matemáticas aplicada de la universidad de Málaga. Contiene problemas, exámenes y apuntes sobre la integral indefinida.

[W6] <http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/calculo.html>

Página web que trata sobre un curso de cálculo diferencial. En el capítulo 9.2 habla de la integración y la antiderivación. Hay teoría y ejercicios.

[W7] <http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/calculo/grupo13m/>

Página web del Departamento de matemáticas aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid. Contiene ejercicios y exámenes sobre integración.

[W8] <http://www.uco.es/organiza/departamentos/quimica-fisica/quimica-fisica/CD/CD0.htm>

Página web que trata sobre un curso de aprendizaje de Mathcad. Hay ejemplos sobre integrales, en el apartado 6) Operadores y en el 15) Matemáticas Simbólicas.

[W9] <http://www.terra.es/personal/jftjft/Home.htm>

Página completa sobre todo lo relacionado con las matemáticas. Aparecen matemáticos famosos y aplicaciones de las matemáticas a diversos campos.