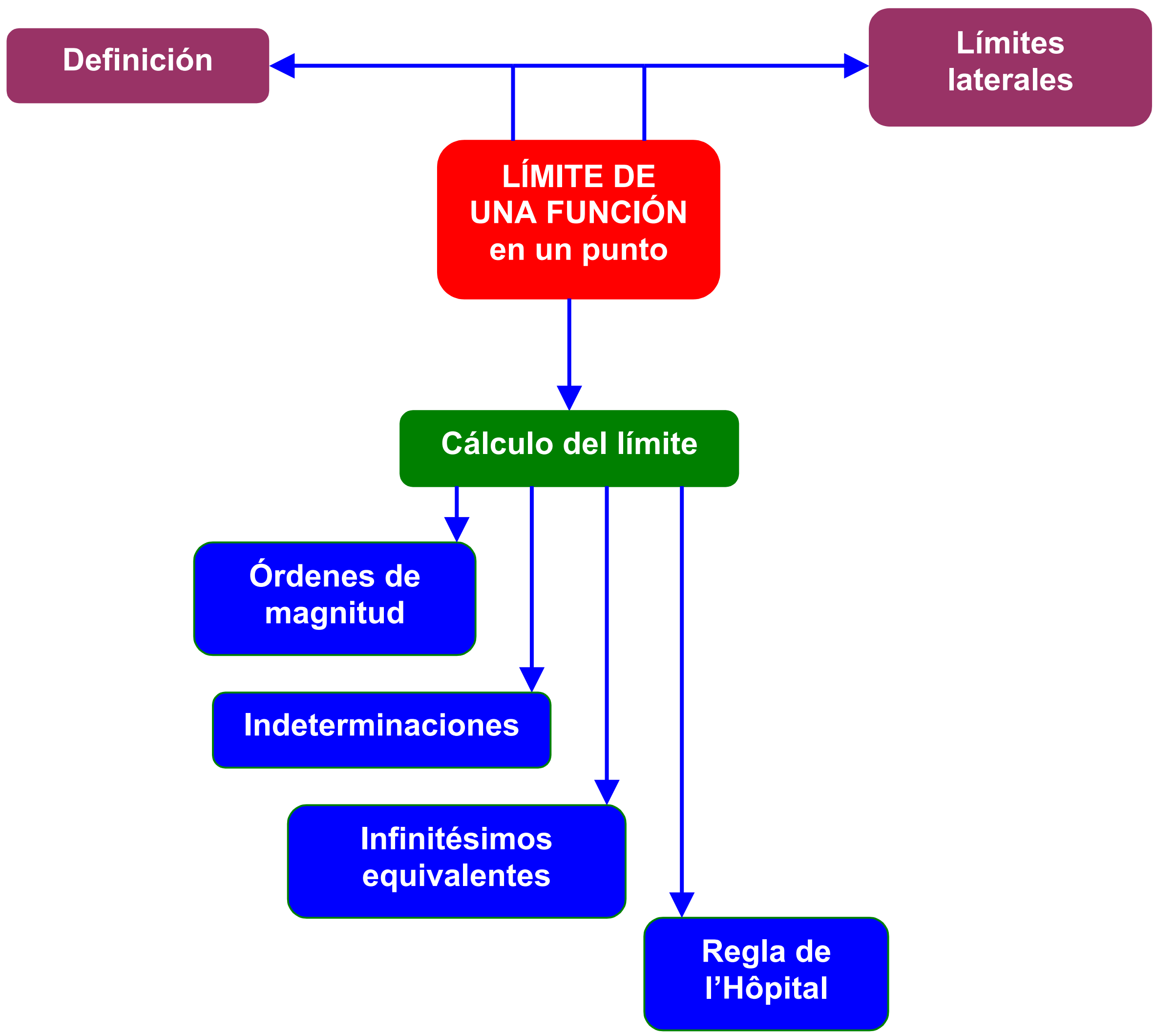
# LIMITES DE FUNCIONES EN 1D

***Autor:*** Patrici Molinàs Mata (pmolinas@uoc.edu), José Francisco Martínez Boscá (jmartinezbos@uoc.edu)

## *ESQUEMA DE CONTENIDOS*



## *INTRODUCCIÓN*

El concepto de límite es uno de los más importantes en el análisis matemático. Sobre el concepto de límite reside la definición de continuidad de una función en un punto así como la de derivabilidad de una función en un punto. Es por este motivo, que dedicaremos un Mathblock entero a estudiar este importante concepto. En particular, vamos a desarrollar suficiente destreza de cálculo como para poder determinar, para cualquier función, la existencia del límite en un punto, es decir, la existencia de una cantidad real finita a la que converge la función al aproximarse a dicho punto, tanto desde valores superiores como inferiores a él.

Se afirma la existencia del límite cuando los límites por arriba y por debajo del punto considerado arrojan el mismo resultado numérico. Estos límites reciben el nombre de límites laterales. Cuando coinciden, el límite existe y su valor es el de los dos límites laterales.

Investigar la existencia de límite conlleva efectuar el cálculo explícito de los límites laterales que muy a menudo supone resolver indeterminaciones como por ejemplo: $0 \cdot \infty$. ¿Qué significa $0 \cdot \infty$? Básicamente significa que al buscar el límite de una expresión, si substituimos la variable por el valor al que tiende, obtenemos algo que tiende a $0$ por algo que tiende a $\infty$. Dependiendo del "grado" o la "fuerza" con la que la primera parte de la función tiende a $0$ y la segunda a $\infty$, la "indeterminación" puede arrojar un valor nulo, real (finito) o infinito.

## *OBJETIVOS DOCENTES*

- Introducir el concepto de límite de una función en un punto.
- Adquirir los conocimientos necesarios para el cálculo automático de límites. Conocer el orden de magnitud de las funciones en su aproximación al infinito.
- Reconocer los siete tipos de indeterminaciones y aplicar métodos de resolución adecuados para solventarlos que incluyen la racionalización, la substitución mediante infinitésimos equivalentes.

## *CONOCIMIENTOS PREVIOS*

Con anterioridad a la lectura de este Mathblock, es fundamental haber realizado un estudio detallado del siguiente tema:

- Funciones reales de variable real.

Asimismo también es muy aconsejable que se tenga un conocimiento mínimo del programa Mathcad, que incluya como calcular límites de funciones.

Por lo tanto, recomendamos que trabajéis los Mathblocks: "Uso básico del Mathcad en Análisis (I): cálculo simbólico y analítico" y "Funciones de una variable", antes de empezar con éste. Después de haber trabajado este Mathblock podéis abordar el de "Continuidad en una dimensión" y "Derivación".

## *CONCEPTOS FUNDAMENTALES*

- **Límite de una función en un punto: definición**

El concepto de límite de una función en un punto es uno de los más importantes del tema dado que permite introducir el concepto de continuidad.

Decimos que **una función** $f(x)$ **tiene limite** $L$ **en un punto** $x_0$ cuando para todo número positivo, $\varepsilon$, (por pequeño que sea), $\forall\varepsilon > 0$, siempre es posible encontrar otro número positivo, $\delta$, tal que si $|x - x_0| < \delta$ esto implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Intuitivamente el límite de una función en un punto equivale al valor al que la función "tiende" independientemente del valor que tiene, a partir de la definición, en aquel punto.

Así, en cada punto de la recta real, tenemos dos límites:

uno **por la derecha o superior** (aproximando la función hacia $x_0$ a partir de valores ligeramente superiores a $x_0$):

$$L^+ = \lim_{x \to (x_0)^+} f(x)$$

y otro **por la izquierda o inferior** (aproximando la función hacia $x_0$ a partir de valores ligeramente inferiores a $x_0$):

$$L^- = \lim_{x \to (x_0)^-} f(x) .$$

$L^+$ y $L^-$ reciben el nombre de **límites laterales** por la **derecha** y por la **izquierda**, respectivamente.

La coincidencia de los dos límites resulta en la existencia del límite de la función en el punto:

$$L = L^+ = \lim_{x \to (x_0)^+} f(x) = L^- = \lim_{x \to (x_0)^-} f(x)$$

- **Órdenes de magnitud en el infinito**

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones tales que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$$

entonces decimos que:

$f(x)$ y $g(x)$ son del **mismo orden de magnitud** cuando el $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una cantidad finita (ni $0$, ni $\infty$). En este caso escribimos $f(x) \approx g(x)$.

$f(x)$ tiene **un orden de magnitud superior** a $g(x)$ cuando $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. En este caso escribimos $f(x) >> g(x)$.

$f(x)$ tiene **un orden de magnitud inferior** a $g(x)$ cuando $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. En este caso escribimos $f(x) << g(x)$.

Damos aquí los **órdenes de magnitud relativos** de las funciones más comúnmente utilizadas:

$$(\log_a x)^k << x^p << a^x << x! << x^x \quad \text{con } k > 0,\ p > 0 \text{ y } a > 1 \quad \text{cuando } x \to \infty$$

Cuando tengamos que resolver un límite racional con dos de estos tipos de funciones, podremos dar el resultado correcto con sólo fijarnos en las posiciones que ocupan en esta gradación.

- **Indeterminaciones**

A menudo no podemos aplicar una relación de órdenes de magnitud, y en el cálculo del límite obtenemos expresiones indeterminadas, es decir cuyo verdadero valor desconocemos.

Se trata de siete expresiones indeterminadas o indeterminaciones: cuatro de racionales y tres de potenciales.

Indeterminaciones **racionales**:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty \text{ y } 0 \cdot \infty$$

Indeterminaciones **potenciales**:

$$1^\infty,\ 0^0 \text{ y } \infty^0$$

En el apartado “Casos prácticos con software” daremos ejemplos tipo de cada una de estas indeterminaciones y de la técnica de resolución que solemos aplicar.

- **Infinitésimos equivalentes**

Supongamos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que: $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Estas funciones recibirán el nombre de infinitésimos equivalentes cuando $x \to a$.

Siempre que tengamos una función $f(x)$ como parte de un límite cuando $x \to a$ podemos substituirla por un infinitésimo equivalente en $x \to a$ si está multiplicando o dividiendo al resto de la expresión.

Por ejemplo, son infinitésimos equivalentes cuando $x \to 0$, las siguientes funciones:

$$x,\ \sin x,\ \arcsin x,\ \tan x,\ \arctan x,\ \ln(1+x),\ e^x - 1,\ \sinh x,\ \tanh x$$

- **Regla de l'Hôpital**

Sean $f$ y $g$ funciones reales de variable real, continuas, tales que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$ o bien que ambos límites son nulos: $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$. Si existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces también existe el $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, y ambos coinciden:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es muy útil para resolver límites indeterminados como mostramos, en un ejemplo, en "Casos prácticos con software".

## CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

- **Cálculo de límites laterales y determinación de la existencia del límite**

Calculemos analíticamente y con Mathcad los límites laterales para las siguientes expresiones:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$$

b) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x^2-3x+2)}$$

y determinemos si el límite existe.

a) Empecemos calculando el límite por la derecha de la función cuando x tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=$$

Podemos resolver la indeterminación aparente del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ multiplicando numerador y denominador por $e^{-\frac{1}{x}}$:

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-\frac{2}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \qquad \text{debido a que} \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{y\to\infty} e^{-2y} = 0$$

De forma similar podemos calcular el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{e^{\frac{2}{x}} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad \text{donde} \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{2}{x}} = \lim_{y\to -\infty} e^{2y} = 0$$

Estos resultados pueden ser comprobados fácilmente con Mathcad:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}\right)} \to 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}\right)} \to -1$$

Puesto que los dos límites laterales (-1 y 1) no coinciden, no existe el límite de la función en el punto cero,

b) Calculemos los límites laterales que muestran una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ expresando los polinomios del numerador y denominador en función de binomios elementales con la intención de simplificar:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{(x-2)(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)}{(x-2)(x-1)} = 0$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{(x-2)(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x+2)}{(x-2)(x-1)} = 0$$

Con la ayuda de Mathcad podemos comprobar estos límites:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 4}{(x-2)\cdot\left(x^2 - 3x + 2\right)} \to 0$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 4}{(x-2)\cdot\left(x^2 - 3x + 2\right)} \to 0$$

y, por tanto:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)\cdot\left(x^2 - 3x + 2\right)} \to 0$$

Dado que los límites laterales son finitos y coinciden, existe el límite de la función en el punto x=-2.

- **Resolución de indeterminaciones**

**Racionales**

En el punto anterior hemos tratado dos ejemplos de indeterminaciones tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Vamos ahora a tratar las indeterminaciones de los tipos $\infty - \infty$ y $0 \cdot \infty$.

Supongamos la función $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ y calculemos su límite cuando $x \to \infty$. Debemos resolver una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Puesto que se trata de una diferencia de raíces, para solventar la indeterminación utilizaremos la técnica de multiplicar por el conjugado en el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

| | |
|---|---|
| Comprobemos este resultado con Mathcad | $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \to 0$ |

Como ejemplo de indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$ tomemos la función $e^{-x} \cdot x$ cuando $x \to \infty$. Para resolver la indeterminación basta con expresar dicho límite como un cociente de infinitos y, posteriormente, por comparación de órdenes de magnitud, obtener el resultado:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

| | |
|---|---|
| Comprobémoslo con Mathcad | $\lim_{x \to \infty} e^{-x} \cdot x \to 0$ |

**Potenciales**

Vamos a tratar las indeterminaciones $1^{\infty}$, $0^{0}$ y $\infty^{0}$.

Supongamos la función $\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}$ y calculemos su límite cuando $x \to \infty$. Debemos resolver una indeterminación del tipo $1^{\infty}$. Para solventarlas intentaremos expresar la función a partir del número $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1/2}\right)^{x} =$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1/2}\right)^{x-1/2} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1/2}\right)^{1/2} =$$

y substituyendo $y \equiv x - 1/2$ llegamos a:

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1/2}\right)^{1/2} = e \cdot 1 = e$$

| | |
|---|---|
| Comprobemos el resultado con Mathcad | $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x} \to \exp(1)$ |

Supongamos la función $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x-1}}$ y calculemos su límite cuando $x \to 1^{+}$. La simple substitución nos conduce a una indeterminación del tipo $0^{0}$. Veamos como podemos resolverla buscando el límite del logaritmo neperiano de la función:

$$\lim_{x\to 1^{+}} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1^{+}} \sqrt{x-1} \cdot \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) =$$

Hemos conseguido convertir el problema en el de una indeterminación tipo $\infty \cdot 0$, que vamos a expresar —siguiendo lo que hemos hecho anteriormente— como una indeterminación $\frac{0}{0}$:

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} =$$

Aplicando la Regla de l'Hôpital, tenemos que:

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2}(x-1)^{-3/2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-2\sqrt{x-1}}{x} = 0$$

Luego el límite que buscamos es la exponencial del límite del logaritmo neperiano de la función. En efecto:

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1^+} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x-1}}} = e^0 = 1$$

| | |
|---|---|
| Comprobemos el resultado con Mathcad | $\lim_{x\to 1^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x-1}} \to 1$ |

Finalmente vamos a ilustrar la última de las indeterminaciones racionales $\infty^0$. Supongamos la función $(\tan(x))^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ y calculemos su límite cuando $x \to \frac{\pi}{2}^-$. La simple substitución nos conduce a una indeterminación del tipo $\infty^0$. Veamos como podemos resolverla efectuando, en primer lugar, el siguiente cambio de variable: $y \equiv \frac{\pi}{2} - x$ que conlleva que el límite sea de la función $\left(\frac{1}{\tan(y)}\right)^y$ para $y \to 0^+$.

Para resolver este límite, buscamos el límite del logaritmo neperiano de esta función:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{\tan(y)}\right)^y = \lim_{x\to 0^+} y\cdot\ln\left(\frac{1}{\tan(y)}\right) = \lim_{x\to 0^+} y\cdot\ln\left(\frac{1}{\tan(y)}\right) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln(\tan(y))}{\frac{1}{y}} =$$

Aplicando l'Hôpital para solventar la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$= \lim_{x \to 0^+} - \frac{\frac{1}{\tan(y)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2y^2}{\sin(2y)} =$$

hemos conseguido reducir la indeterminación a una del tipo $\frac{0}{0}$ , que volvemos a derivar:

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{2y^2}{\sin(2y)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{4y}{2\cos(2y)} = 0$$

Y, por lo tanto, como el límite del logaritmo neperiano de la función $(\tan(x))^{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ vale $0$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}^-$ , el límite de dicha función para $x \to \frac{\pi}{2}^-$ vale 1.

| | |
|---|---|
| Comprobemos el resultado con Mathcad | $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\tan(x))^{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \to 1$ |

- **Cálculo de límites mediante infinitésimos equivalentes**

Calculemos los siguientes límites:

*a)* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{\left(x - x^3\right)^2}$ *b)* $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{\ln(1 - x)}$

utilizando infinitésimos equivalentes y suponiendo que el resultado es independiente de como se efectúa la aproximación al valor (a partir de valores superiores o inferiores).

a) Aplicando infinitésimos equivalentes podemos calcular el valor del límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{\left(x - x^3\right)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3x \cdot 5x}{x^2 \cdot \left(1 - x^2\right)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{15}{\left(1 - x^2\right)^2} = 15$$

| a)<br><br>Comprobemos este resultado con Mathcad | $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) \cdot \sin(5x)}{\left(x - x^3\right)^2} \to 15$ |
|---|---|

b) Aplicando infinitésimos equivalentes podemos calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -1$$

| a)<br><br>Comprobemos este resultado con Mathcad | $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{asin}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)} \to -1$ |
|---|---|

- **Aplicación del cálculo diferencial al computo de límites: Regla de l'Hôpital**

Calculemos los siguientes límites:

*a)* $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$ *b)* $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + p^2} - p}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + q^2} - q}$ con p y q >0

utilizando la regla de l'Hôpital.

El límite en *a)* tiende a $\frac{0}{0}$ cuando $x \to 0$ y, por lo tanto, podemos aplicar la regla de l'Hôpital.

Derivando el numerador y el denominador obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{\alpha x} - e^{\beta x})'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x}}{1} = \alpha - \beta$$

Fijaros que no calculamos los límites laterales por separado puesto que coinciden como podéis comprobar.

En el caso *b)* también podemos aplicar la regla de l'Hôpital puesto que el límite tiende a $\frac{0}{0}$ cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}-p}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}-q}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}-p\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}-q\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}}\left(\frac{-2}{x^3}\right)}=$$

que simplificando nos conduce a:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+q^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+p^2}}=\frac{q}{p}$$

Comprobamos ambos resultados con Mathcad:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\cdot x}-e^{\beta\cdot x}}{x}\to\alpha-\beta$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p\cdot\left[\sqrt{1^2+\frac{1}{(x\cdot p)^2}}-1\right]}{q\cdot\left[\sqrt{1^2+\frac{1}{(x\cdot q)^2}}-1\right]}\to\frac{1}{p}\cdot q$$

- **Límites indeterminados. Ejemplos de límites indeterminados de dos tipos: los que pueden ser resueltos mediante la regla de l'Hôpital y los que no**

Vamos a justificar por qué motivo no podemos aplicar la Regla de l'Hôpital a algunos de los límites siguientes y, en estos casos, los resoldremos mediante otros métodos:

a) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln x}{e^{1/x}}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin(1/x)}{\sin x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$

Recordemos lo que establece la Regla de l'Hôpital. Si el cálculo del límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ conduce a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ con $a \in \Re$ o $a$ infinito, y el $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (es decir, es igual a un número real $L$) entonces podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Fijémonos que la Regla de l'Hôpital no afirma que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista necesariamente. Seguidamente veremos cómo para muchas funciones este último límite no existe y, sin embargo, somos capaces de calcular el límite indeterminado $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) Cómo se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ podemos intentar evaluar el límite $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Si éste existe (es finito), aplicando la Regla de L'Hôpital conoceremos el valor de $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Evaluando obtenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\ln x)'}{(e^{1/x})'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{(e^{1/x})(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{1/x}} = 0$$

con lo que podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{e^{1/x}} = 0$$

b) Al tratarse de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ podemos intentar evaluar el límite $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Si éste existe (es finito), aplicando la Regla de L'Hôpital conoceremos el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Evaluando este último límite obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2\cdot\sin(1/x)\right]'}{[\sin x]'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin(1/x)+x^2\cdot\sin(1/x)\left(-1/x^2\right)}{\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin(1/x)-\sin(1/x)}{\cos x}$$

cuya expresión final oscila en [-1,1] y por lo tanto no tiene límite. Es, pues, imposible aplicar la Regla de l'Hôpital para calcular el límite que nos ocupa.

No obstante, podemos resolverlo utilizando infinitésimos equivalentes. Cuando $x\to 0$ las funciones $x$ y $\sin x$ son equivalentes (infinitésimos equivalentes). Esto permite efectuar el siguiente cálculo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin(1/x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin(1/x)=0$$

donde hemos aplicado en la última igualdad el hecho que el producto de una función que tiende a cero por una función que oscila entre dos cantidades finitas, en este caso $-1$ y $1$, tiende a cero.

c) Del mismo modo que en b), veremos en este caso que la Regla de l'Hôpital tampoco sirve. Si evaluamos el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ vemos que no existe. En efecto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d(x-\sin x)}{dx}}{\frac{d(x+\sin x)}{dx}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

donde la expresión final oscila. No obstante el límite puede resolverse fácilmente sacando factor común $x$ tanto en el numerador como en el denominador:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\sin x/x)}{x(1+\sin x/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x/x}{1+\sin x/x}=1$$

d) Finalmente el último límite sí que se puede resolver utilizando la Regla de l'Hôpital. Evaluemos el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d(\sin x-x)}{dx}}{\dfrac{dx^2}{dx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}$$

Al ser el límite del cociente de las primeras derivadas indeterminado, se calcula el mismo límite para el cociente de derivadas segundas y así sucesivamente hasta que el límite dejase de ser indeterminado. Evaluaremos el límite del cociente de las segundas derivadas:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

Entonces podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=0$$

Comprobemos los resultados con Mathcad:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln(x)}{\dfrac{1}{e^x}}\to 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin(x)}\to 0$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}\to 1 \qquad \lim_{x\to \infty}\frac{\sin(x)-x}{x^2}\to 0$$

## CONCLUSIONES

Hemos visto la importancia del concepto de límite y su sentido intuitivo. El límite es el valor que la función debería tener o, de hecho, tiene en un punto a tenor de los valores de la función muy cerca de dicho punto. En una dimensión, la existencia de límite equivale a la existencia de dos límites llamados laterales y correspondientes a la aproximación hacia dicho punto mediante valores superiores e inferiores al pùnto considerado.

Calcular un límite de una función en un punto se efectúa mediante reglas basadas en órdenes de magnitud de crecimiento, resolución de indeterminaciones, substitución por infinitésimos equivalentes o derivación (Regla de l'Hôpital). Con una amplia muestra de límites hemos ilustrado las diferentes técnicas para el cálculo de límites.

Mathcad representa una ayuda inestimable para la comprobación de límites calculados analíticamente al mismo tiempo que un instrumento independiente para el cálculo simbólico y numérico de límites.

## BIBLIOGRAFÍA

[1] J. M. Ortega (1990): "Introducción al Análisis Matemático", Manuales de la Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

[2] V.A. Kudryasvtsev and B.P. Demidovich (1981): "A brief course of Higher Mathematics", Mir Publishers, Moscú, p. 109-146.

[3] T.A. Apostol (1981): "Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal", Reverté, Barcelona, p. 156-159.

[4] R. Calm, N. Coll, y M.R. Estela (1992): "Problemas de cálculo", Micromar, Barcelona, p. 66-106.

[5] R. Courant and F. John (1976): "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Limusa, México, p. 105-109.

[6] S. Martín Monllleví (2000): "Las ideas básicas del cálculo", Ediuoc, Barcelona, p. 9-16.

[7] S. Martín Monllleví (2000): "Profundización en las técnicas de cálculo", Ediuoc, Barcelona, p. 7-21.

[8] B. Demidovich (1978): "Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático", Paraninfo, Madrid, p. 20-30.

[9] M.R. Estela, E. Cuello y A.Carmona (2000): "Cálculo: Problemas y soluciones", Edicions UPC, Barcelona, p. 33-46.

[10] T.M. Apostol (1979): "Análisis Matemático", Reverté, Barcelona, p. 90-93.

## ENLACES

[W1] http://www.satd.uma.es/a_valverde/aula-calculo/calculo.html
Excelente aula virtual con apuntes de límites de funciones (tema C5).

[W2] http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/cie_mat_calculo/apuntes.html
En el Capítulo 1 se presentan —entre otros contenidos— los límites de funciones.

[W3] http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primerciclo/calculo/grupo15t/
Teoria, ejercicios, problemas y enunciados de exámenes de cálculo (también de límites de funciones).

[W4] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/apuntes/
Apuntes de series de límites y continuidad.

[W5] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/problemas/
Problemas y ejercicios de límites.

[W6] http://planetmath.org/encyclopedia/Limit.html
Página web de PlanetMath.org dedicada a límites de funciones (en inglés). Contiene una breve reflexión histórica sobre la formulación de la definición más común actualmente de límite.

[W7] http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=2950
Página web de PlanetMath.org dedicada a límites laterales (en inglés).

[W8] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/calculo_1/default.htm
Excelente resumen de cálculo (límites, derivación, integración, etc) con funciones.
Contiene un módulo sobre el cálculo de límites indeterminados de funciones.

[W10] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/deri_limi/default.htm
Apuntes de límites y derivación de funciones.


Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)