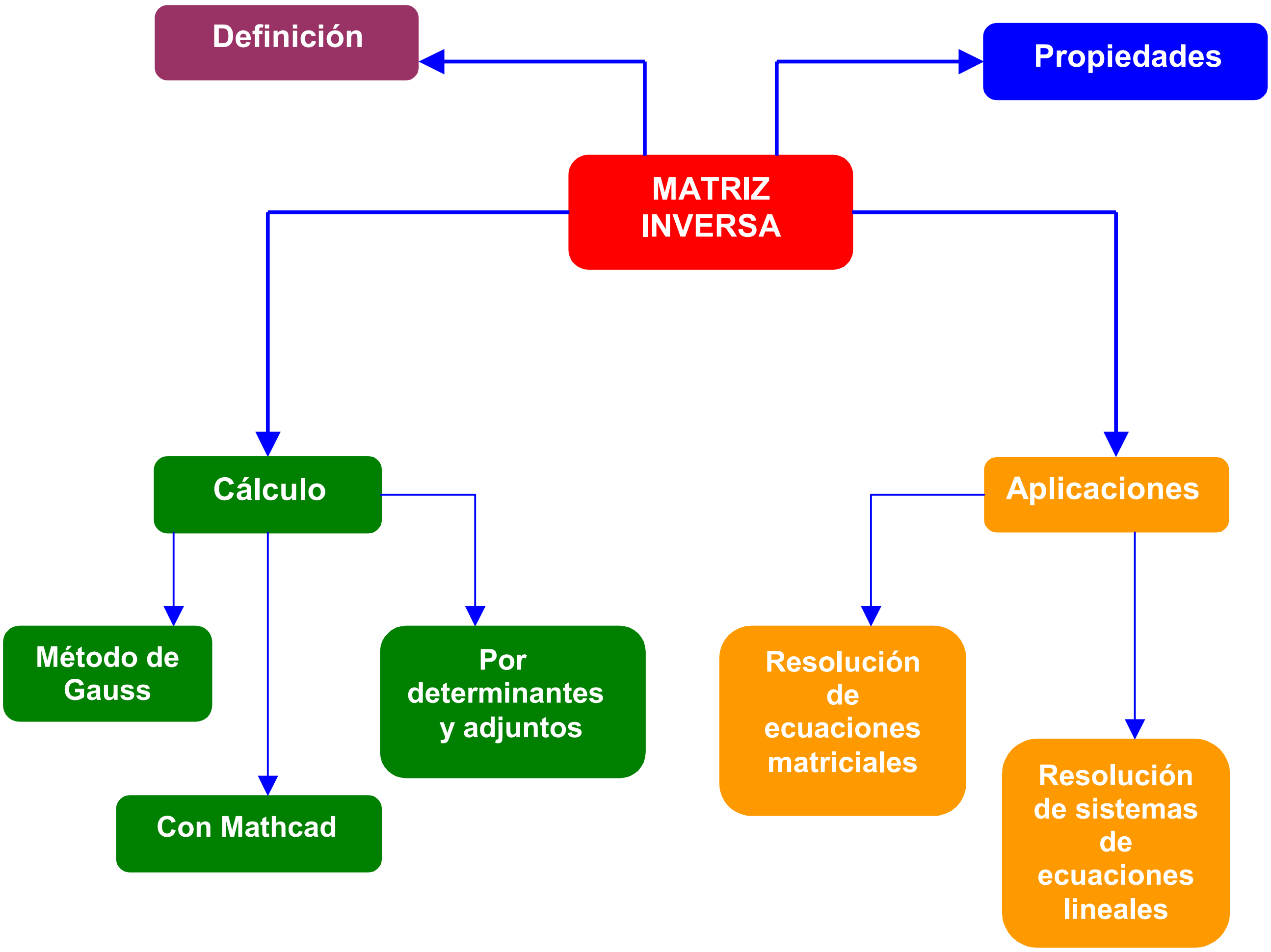
MATRIZ INVERSA

Autores: Cristina Steegmann Pascual (csteegmann@uoc.edu), Juan Alberto Rodríguez Velázquez (jrodriguezvel@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Es de todos sabido que nuestra vida diaria contemporánea requiere de una cantidad de conocimientos matemáticos cada vez más importantes, sin los cuales carece, virtualmente, de significado.

En los bloques anteriores se ha visto que la teoría de matrices permite el manejo de gran cantidad de datos y es esencial, no sólo para su uso en diferentes modelos matemáticos sino también para diversos métodos estadísticos. [W1]

El objeto de este e-bloque es el desarrollo y estudio de un tema básico de álgebra lineal como es el cálculo de la matriz inversa y algunas aplicaciones de ésta a modelos matemáticos.

En éste se intenta, sin perder rigurosidad matemática, clarificar algunos conceptos para hacerlos accesibles a un público no matemático. Sin embargo, y dada la amplia magnitud del tema a abarcar, con este bloque no se pretende acabar con el tema sino sentar las bases y fundamentos del mismo e incentivar su estudio, profundización y aplicación posterior.

El cálculo de la matriz inversa no es un proceso sencillo. Primeramente se aborda desde el punto de vista del método de Gauss y, después por determinantes y adjuntos; posteriormente, se hace uso del software Mathcad para su cálculo y, por último, se muestran diversas aplicaciones de ésta.

Del mismo modo, las aplicaciones que se presentan son ejemplos dentro de un campo muy amplio. Incluso los ejemplos mostrados no finalizan en lo escrito en este bloque, sino que es una introducción al mismo, con el objeto de ilustrar el uso de matrices en problemas no matemáticos, por una parte y hacer accesible los modelos y sus diversas derivaciones, por otra.

OBJETIVOS

- Aprender a averiguar cuándo existe la matriz inversa de una matriz dada.
- Aprender a calcular, si existe, la matriz inversa de una matriz.
- Conocer las propiedades de la matriz inversa.
- Conocer algunas aplicaciones de la matriz inversa.
- Introducirse en el uso del Mathcad para trabajar con la matriz inversa.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable haber leído, previamente, los math-blocks sobre álgebra de matrices y determinantes, así como los introductorios a Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Definición de matriz inversa [1]

Se dice que una matriz cuadrada A es inversible, si existe una matriz B con la propiedad de que

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = I}$$

siendo I la matriz identidad.

Denominamos a la matriz B la inversa de A y la denotamos por A^{-1}.

Una matriz se dice que es **inversible** o **regular** si posee inversa. En caso contrario, se dice que es **singular**.

Ejemplo:

Supongamos $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Entonces:

$$A.B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5 & -10+10\\ 3-3 & -5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$
$$B.A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5 & 15-15\\ -2+2 & -5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Puesto que *AB* = *BA* = *I, A* y *B* son inversibles, siendo cada una la inversa de la otra.

Condición de inversibilidad [W3]

El problema de encontrar elementos inversos para el producto de matrices tiene como primer inconveniente que, para empezar, no siempre dadas dos matrices A y B, que podamos hacer el producto A·B significa que podamos hacer el producto B·A

Además, que dos matrices sean inversas una de la otra significa, en particular, que el producto ha de dar como resultado la matriz identidad. Si recordamos la definición, la matriz identidad es aquélla cuyos elementos son nulos **salvo** los de la diagonal, que son 1, y, además, esto es importante, dicha matriz es **cuadrada**. El hecho de que la matriz identidad sea cuadrada nos va a restringir mucho el conjunto de matrices para las que podremos hablar de inversión.

Vamos a ver qué primera condición han de cumplir dos matrices A y B para que sean la una inversa de la otra. Esto, como sabemos, significa que A·B = B·A = **I**, donde **I** denota a la matriz identidad. Las matrices serán, en principio, A de orden mxn y B de orden pxq.

Sin embargo, por definición del producto de matrices, se debe cumplir que n=p para poder hacer la multiplicación A·B. Sabemos, además, que esta matriz será de orden mxq. Pero también tenemos que poder hacer el producto B·A, lo que implica que debe ser m=q. Así pues, la matriz A será de orden mxn, y la matriz B será de orden nxm. El producto A·B será de orden mxm, y el producto B·A será de orden nxn. Además, ambos productos han de dar como resultado la matriz identidad, y ésta es cuadrada, lo que obliga a que m=n, es decir, a que *para poder hablar de inversión* de una matriz, la matriz ha de ser **cuadrada**. Sin embargo, es una condición necesaria pero no suficiente; esto es, no toda matriz que sea cuadrada tiene matriz inversa. No es la única condición que se exige a la matriz.

Cálculo de determinantes

Método de Gauss [W2]

Veamos un método que *a priori* no nos garantiza que la matriz en cuestión sea inversible, sin embargo, en caso de que se pueda aplicar, nos dará la inversa sin hacer operaciones demasiado complicadas. Si la matriz no se puede invertir, llegaremos a una situación que nos lo indicará.

El cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss supone transformar una matriz en otra, equivalente por filas. La demostración rigurosa del procedimiento que a continuación se describe se sale del propósito del presente bloque, aquí se limita a su exposición y comprobación de que efectivamente se obtiene la matriz inversa.

En esencia, el método consiste, para una matriz cuadrada de orden n, en:

1. Formar una matriz de orden nx2n tal que las primeras columnas sean las de la matriz A y las otras n las de la matriz identidad de orden n.

2. Mediante las transformaciones elementales de las filas de una matriz, convertir la matriz anterior en otra que tenga en las n primeras columnas la matriz identidad y en las n últimas otra matriz que prescisamente será A^{-1}.

El método consiste, pues, en colocar juntas la matriz a invertir, y la matriz identidad.

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I \mid A^{-1})$$

Por medio de transformaciones elementales, vamos modificando nuestra matriz hasta obtener la matriz identidad. Cada paso que apliquemos a la matriz se lo aplicaremos a la matriz identidad. Cuando hayamos obtenido la matriz identidad, la de la derecha será la inversa. Si no podemos llegar a la matriz identidad (por ejemplo, sale alguna fila de ceros), significa que la matriz no será inversible. Vamos a ver dos ejemplos, uno en el que se puede obtener la inversa y otro en el que la matriz no es inversible. Ojo a lo siguiente, pues es muy **importante**: hemos de decidir si haremos nuestras transformaciones elementales por filas o por columnas, pues *la forma que elijamos debe mantenerse a lo largo de todo el proceso de inversión* de la matriz.

Las transformaciones elementales son las siguientes: substituir una fila o columna de la matriz por ella misma multiplicada (o dividida) por un número, substituir una fila o columna de la matriz por una combinación lineal de filas o columnas de la matriz (si es fila, filas, y si es columna, columnas), e intercambiar filas o columnas.

Por simplicidad en la notación, c indicará columna (ej., 1ª c es 1ª columna) y f indicará fila (ej., 3ª f es 3ª fila).

Ejemplo 1:

Ver si es inversible o no y calcular (si se puede) la inversa de la siguiente matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Planteamos, como hemos dicho, las dos matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En primer lugar, por simplicidad en las operaciones, vamos a intercambiar las filas 2 y 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hacemos 3ª f = 3ª f - 2·1ª f (y dejamos el resto igual):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora 3ª f = 3ª f + 4·2ª f (estos dos pasos se podrían haber resumido en una sola operación, 3ª f = 3ª f-2·1ª f + 3.2ª f, no se ha hecho por claridad al ser el primer paso):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ahora hacemos 1ª f = (1ª f)/2 y 3ª f = (3ª f)/(-6):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/6 & -1/2 \end{array}\right)$$

Y, por último, hacemos la operación 1ª f = 1ª f - (3/2)· 2ª f - 2.3ª f:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/6 & -1/2 \end{array}\right)$$

Con lo que la inversa es:

$$\begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Comprobémoslo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

Ver si es inversible y calcular (si es posible) la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

De nuevo, planteamos las dos matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hacemos 2ª f = 2ª f + 2.1ª f, 3ª f = 3ª f -3·1ª f:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Y ahora hacemos 3ª f = 3ª f + 2ª f:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por mucho que queramos, al habernos aparecido una fila de ceros, ya no podremos obtener la matriz identidad. En cuanto nos sale una fila, o más (o columna/s, si es que trabajamos por columnas) de ceros, lo que nos está diciendo es que la matriz no es inversible.

Por adjuntos y determinantes [W5]

En este apartado se va a mostrar una forma, alternativa a la anterior, de determinar cuándo una matriz cuadrada tiene inversa así como a calcularla.

La matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es inversible si y sólo si su determinante es diferente de cero ($|A| \neq 0$) y la forma de calcularla es la siguiente:

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^T}{|A|}$$

donde A^d es la matriz de adjuntos de A y $(A^d)^T$, su traspuesta.

La restricción de que el determinante de la matriz debe ser diferente de cero para la existencia de la matriz inversa es debido a la imposibilidad de dividir por cero. Dicha condición, a diferencia de la de inversibilidad, sí que es necesaria y suficiente; esto es, podemos afirmar que <u>toda matriz cuyo determinante sea diferente de cero tiene inversa.</u>

Ejemplo 1:

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Cálculo del valor de su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 12 = -26 \neq 0$$

Al ser el determinante diferente de cero sabemos, pues, que la matriz tendrá inversa.

2. Cálculo de la matriz de adjuntos (A^d)

Los cofactores de los nueve elementos de A son:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

Por tanto, la matriz de adjuntos es:

$$A^d = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -2 \\ -8 & -2 & 1 \\ -10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

3. Cálculo de la matriz traspuesta de la matriz de adjuntos.

$$(A^d)^T = \begin{pmatrix} -10 & -8 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

4. Entonces, aplicando la definición anterior obtenemos la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^T}{|A|} = \frac{1}{-26} \cdot \begin{pmatrix} -10 & -8 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

5. Y, simplificando:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/13 & 4/13 & 5/13 \\ -2/13 & 1/13 & -2/13 \\ 1/13 & -1/26 & -11/26 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al calcular el determinante se comprueba que éste es igual a cero, por lo que se puede afirmar que dicha matriz no posee inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 6 - 6 - 12 = 0$$

Propiedades de la matriz inversa [6]

1. Si B y C son, ambas, inversas de la matriz A, entonces B=C.

   Como consecuencia de este importante resultado, podemos afirmar que la inversa de una matriz, si existe, es única. Toda matriz inversible tiene exactamente una única matriz inversa.

2. Si A y B son matrices inversibles del mismo tamaño, entonces:
   a) $A \cdot B$ es inversible
   b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

   Ejemplo:

   Sean las matrices:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Entonces, } A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

   Si se aplica el resultado anterior:

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

   También,

   $$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

   Por consiguiente, se cumple que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, como se afirma en la propiedad enunciada.

3. Si A es una matriz inversible, entonces:

   a) A^{-1} es inversible y $(A^{-1})^{-1} = A$
   b) A^n es inverible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para n = 0, 1, 2, ...
   c) Para cualquier escalar *k* diferente de cero, la matriz $k \cdot A$ es inversible y $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$

   Ejemplo:

   a) Sean A y A^{-1} como las matrices del ejemplo anterior; es decir,

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Entonces,

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Igualmente:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{pmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{pmatrix}$$

Por tanto, A^3 es inversible.

c) Si k=3, entonces $k \cdot A = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

$$(k \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot A^{-1}$$

Con lo que queda demostrada dicha propiedad.

4. Si A es una matriz inversible, entonces su matriz de adjuntos correspondientes A^T también es inversible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Ejemplo:

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Al aplicar la propiedad anterior, se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Como garantiza la propiedad anterior, estas matrices la satisfacen.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

Matriz inversa con Mathcad [3]

Veamos a continuación cómo se traduce, en mathcad, la condición que debe cumplir para que una matriz sea inversible. Y para ello nos ayudaremos de un ejemplo.

Ejemplo:

Sea la matriz:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Queremos averiguar si existe la matriz

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

tal que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, haciendo uso de las funciones de Mathcad, podemos afirmar que:

La matriz A es inversible $\Leftrightarrow$ RREF (A) = I

o dicho de otro modo:

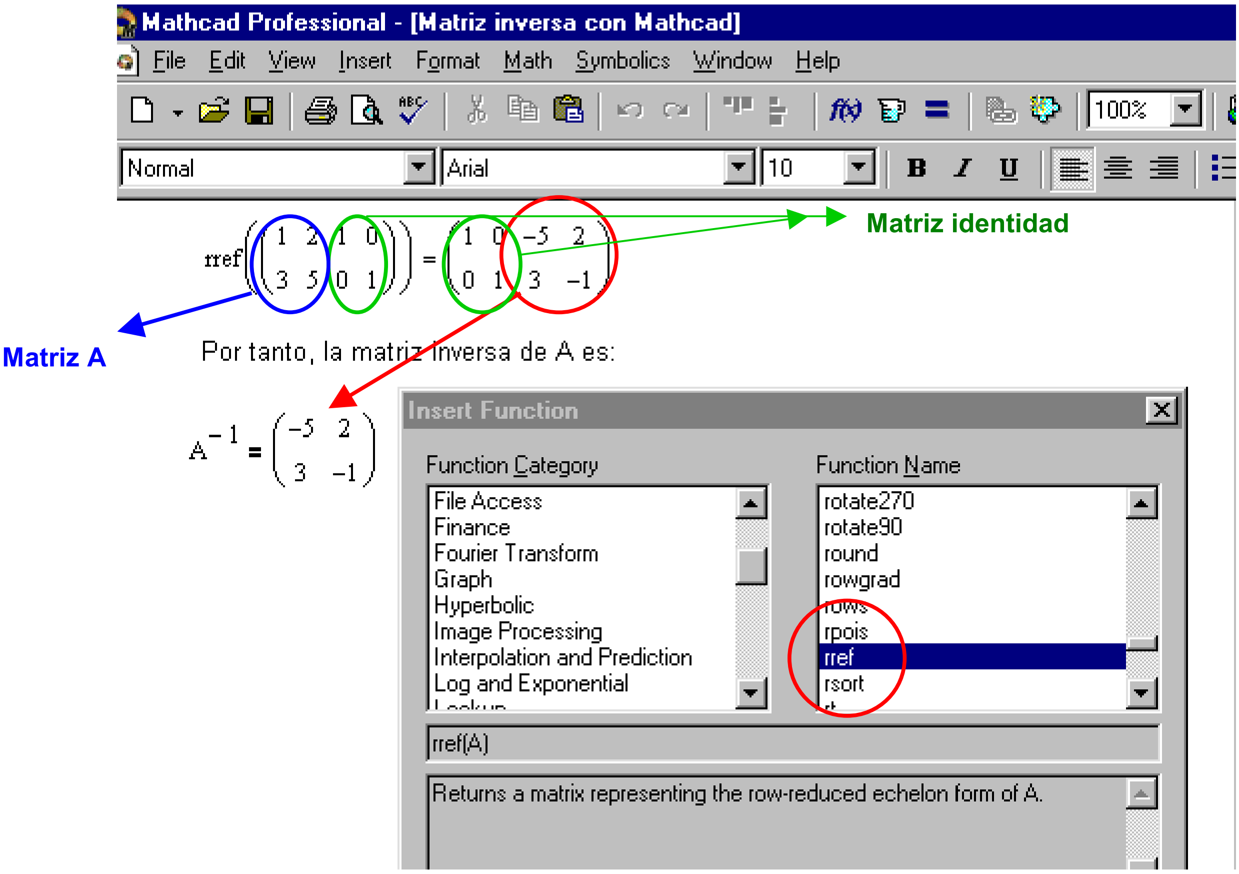
Para determinar si la matriz A es inversible y calcular su inversa se debe hallar RREF(A $|$ I). Si el resultado es (I $|$ Q), entonces A es inversible y $Q=A^{-1}$

Comprobemos estas afirmaciones con el ejemplo anterior:

$$\mathrm{rref}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

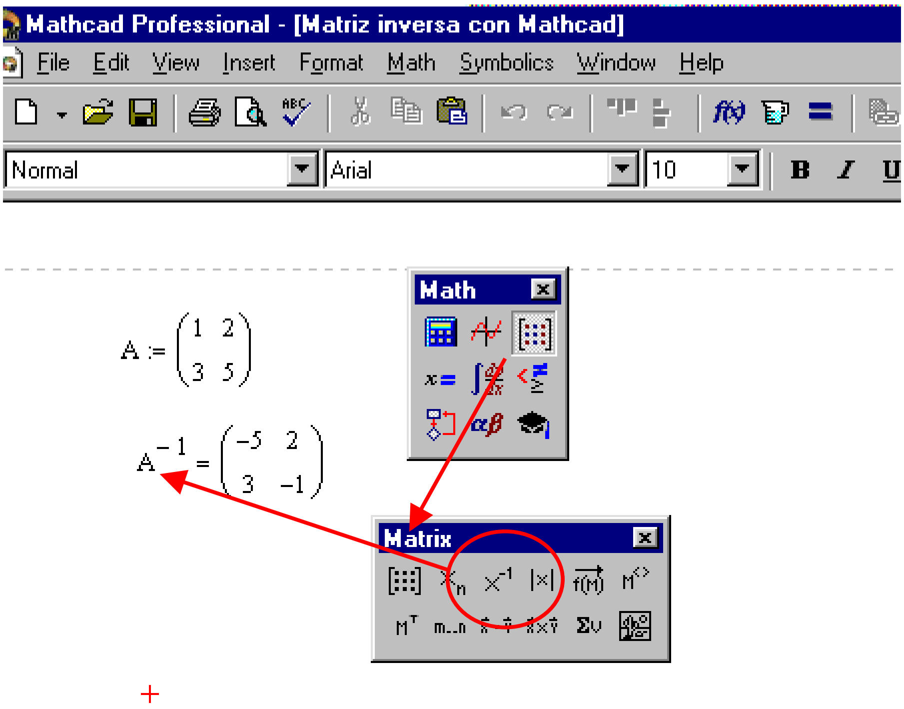


Otra alternativa para calcular matrices inversas, con la ayuda de Mathcad, es hacer uso del comando $\mathbf{X^{-1}}$ de la barra de herramientas **Matrix**.

Veamos el ejemplo.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

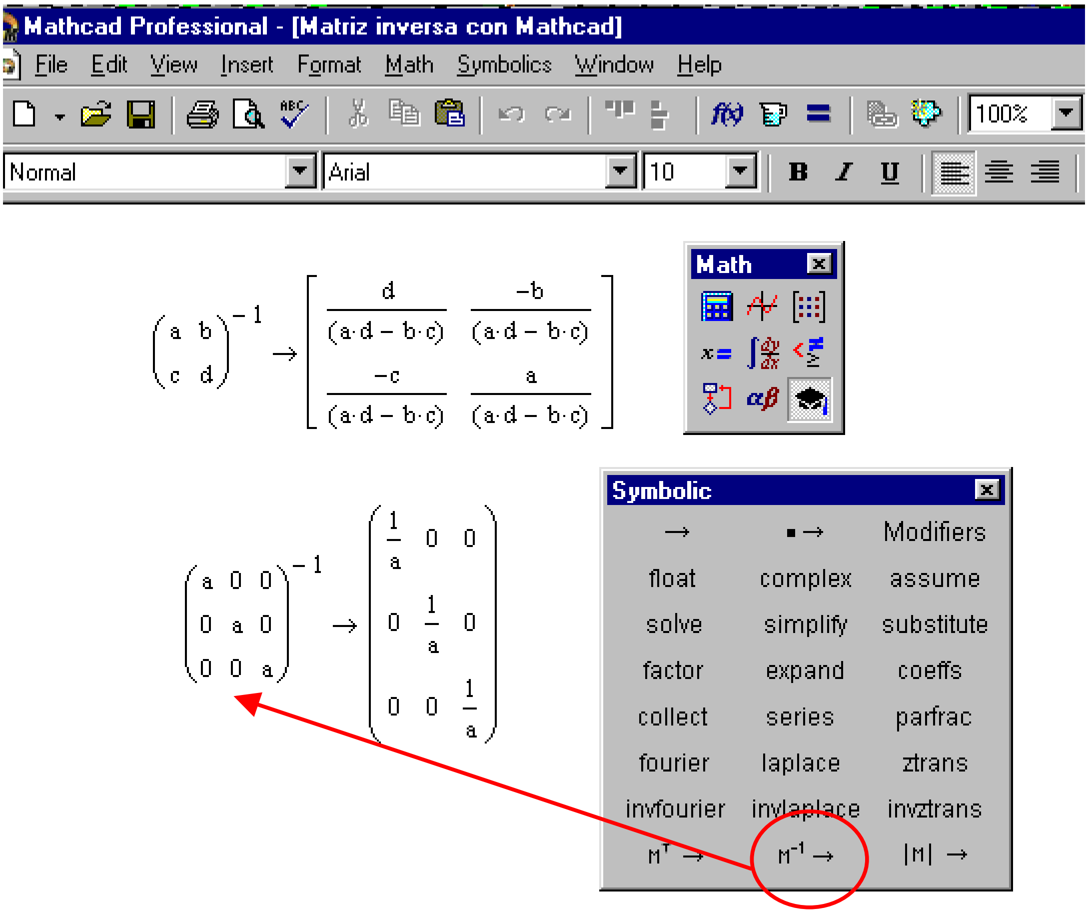


Y si lo que se desea es calcular la matriz inversa de una matriz compuesta por <u>símbolos, o símbolos y números</u>, debemos hacer uso del comando **Invert Matrix** de la barra de herramientas **Symbolic**, de la siguiente manera:

1. Creamos y escribimos la matriz mediante la barra de herramnientas **Matrix**.
2. Con el cursor lo más a la derecha posible, seleccionamos el comando **M^{-1}** de la barra **Symbolic.**
3. Pulsamos **Intro** para ver el resultado.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{d}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \dfrac{-b}{(a \cdot d - b \cdot c)} \\ \dfrac{-c}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \dfrac{a}{(a \cdot d - b \cdot c)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$$



Aplicación a la resolución de ecuaciones matriciales [W5]

Una ecuación matricial es aquélla en la que sus coeficientes e incógnitas son matrices.

Para resolverlas es necesario despejar la incógnita, tal como si de una ecuación con números reales se tratara. El "problema" aparece cuando la incógnita está multiplicada por otra matriz y, como ya es sabido, no es posible "dividir" matrices. En ese caso hay que recurrir a la matriz inversa.

Veamos un ejemplo aclaratorio de ello:

Sea la ecuación matricial siguiente:

$2A = A \cdot X + B$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

despejamos y queda:

$A \cdot X = 2A - B$

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & -2 \\ -1+3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos la inversa de A y la multiplicamos por la izquierda (cabe recordar que el producto de matrices no es conmutativo), a ambos lados de la igualdad, obtenemos la matriz X (puesto que $A^{-1} \cdot A = I$):

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de A haciendo uso del programa mathcad (tal como anteriormente se ha explicado):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución a la ecuación matricial dada es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto es:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales [W4, W6]

Para resolver muchos problemas matemáticos es necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales. Existen diversos métodos para resolverlos (recodemos los conocidos método de igualación, substitución e igualación). Pero, si dichos sistemas están formados por gran cantidad de ecuaciones e incógnitas, el aplicar los métodos anteriores resulta ser una tarea sumamente dificultosa y que, muy probablemente, conducirá a resultados erróneos.

Para solventar este problema, los sistemas de ecuaciones lineales se pueden plantear matricialmente y resolverlos haciendo uso de la matriz inversa.

Veamos a continuación un ejemplo de esto:

En un consejo municipal del ayuntamiento de una ciudad se decide comprar 2 impresoras, 5 ordenadores y 3 escáners.

Para determinar el costo de los artículos se sabe que 1 impresora más 4 ordenadores más 3 escáners valen 2.600€, 2 impresoras más 5 ordenadores más 4 escáners valen 3.500€ y 1 impresora más 3 ordendores más 2 escáners valen 2.000€.

¿Cuál es el coste total de los artículos?

Para resolver este problema, se determina el coste por unidad de cada uno de los útiles: impresora, escáner y ordenador.

De acuerdo a los datos proporcionados, se puede construir el siguiente sistema de ecuaciones:

PI = Precio de una impresora
PO = Precio de un ordenador
PE = Precio de un escáner

$$\begin{cases} 1\cdot PI + 4\cdot PO + 3\cdot PE = 2600 \\ 2\cdot PI + 5\cdot PO + 4\cdot PE = 3500 \\ 1\cdot PI + 3\cdot PO + 2\cdot PE = 2000 \end{cases}$$

Se resuelve este sistema de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} PI \\ PO \\ PE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2600 \\ 3500 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

O bien:

A·X = B, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2600 \\ 3500 \\ 2000 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} PI \\ PO \\ PE \end{pmatrix}$$

A es la matriz de los coeficientes, B es la matriz de los términos independientes y X es la matriz de las incógnitas.

Para ello hay que hallar la inversa de la matriz de coeficientes y multiplicarla por la de términos independientes.

Fijémonos que se parte de que $A\cdot X=B$
Multiplicamos a la izquierda por A^{-1} y se tiene $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$
Como $A^{-1}\cdot A = I$, entonces queda que $X=A^{-1}\cdot B$

Se realiza este cálculo mediante el software Mathcad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2600 \\ 3500 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Este resultado nos indica que el PI=300, PO=500 y PE=100.

Por tanto, el precio de una impresora, un ordenador y un escáner es 300€, 500€ y 100€, respectivamente. Y el coste total de los artículos a comprar asciende a:

$$2\cdot 300 + 5\cdot 500 + 3\cdot 100 = 3.400€$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Carl D. Meyer´s (2000): "Matrix analysis and applied linear algebra", Philadelpia SIAM, 115-121

[2] Montes Lozano, A (1998): "Álgebra", Ediciones UOC, Módulo 3: "Matrices, vectores y sistemas de ecuaciones lineales", 55-58

[3] G. J. Porter, D. R. Hill (1996): “Interactive Linear Algebra. A laboratory course using Mathcad”, Springer-Verlag New York, Inc., Section 2.8

[4] H. Benker (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc., 174

[5] J. A. Moreno, D. Ser (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A., 480

[6] H. Anton (1997): "Introducción al álgebra lineal", Limusa, 66-72

[7] H. Anton, C. Rorres (2000): "Elementary Linear Algebra: Applications Version", John Wiley&Sons.

ENLACES

[W1] http://www.apuntesuniversitarios.com/matrices1/prologo.htm
Página web de apuntes gratis de las universidades nacionales argentinas. En español.

[W2] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/matr_dete/
El sitio de los estudiantes y docentes universitarios. Recopilación de apuntes, con ejemplos, sobre matrices y determinantes. En español.

[W3] http://rinconprog.metropoliglobal.com/CursosProg/ProgGraf/MatGraf/index.php?cap=2c
Página web de "El Rincón del Programador". En la sección de "Programación Gráfica" aparecen los "Fundamentos matemáticos de la Informática Gráfica" donde se explican diversos conceptos relacionados con la matriz inversa. En español.

[W4] http://palillo.usach.cl/Pamela/inversa.htm
Página web de la Universidad de Santiago de Chile. En español.

[W5] http://www.terra.es/personal2/jpb00000/tmatrizinversa.htm
Página web con ejercicios de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En español.

[W6] http://www.terra.es/personal/eurojet/matrices.htm
Página web con aplicaciones realizadas en JavaScript (Jscript para Microsoft) de diferentes métodos numéricos: calculadora científica, inversión matricial, integral numérica, rumbo y distancia de navegación, oscilaciones, etc. En español e inglés.