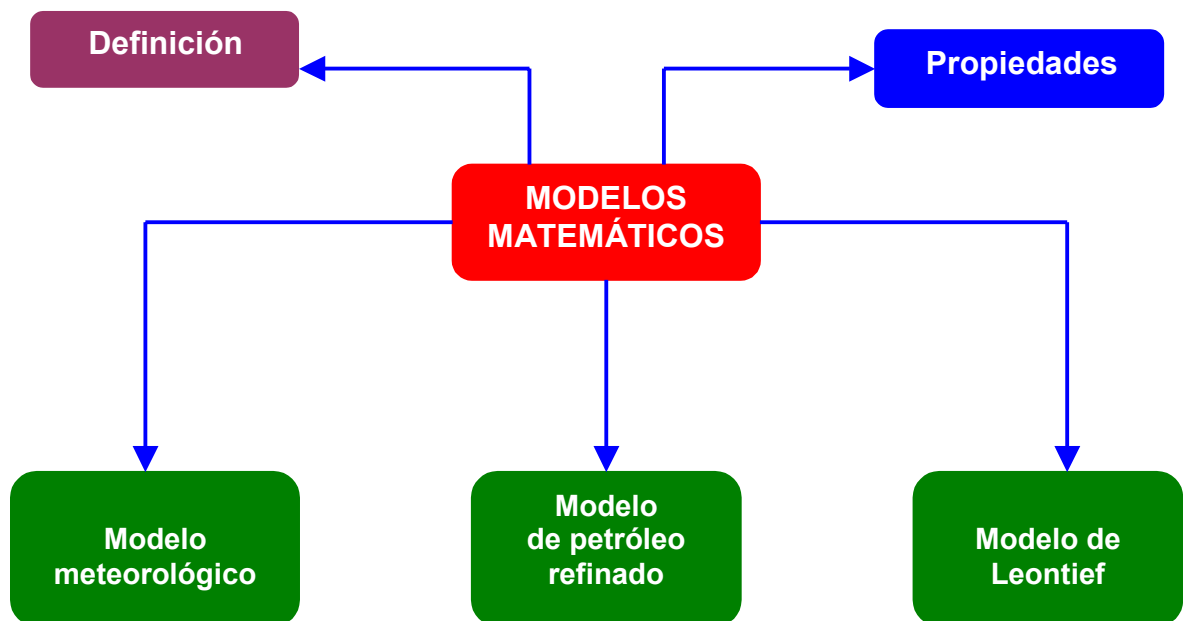


MODELOS MATEMÁTICOS

Autores: Juan Alberto Rodríguez Velázquez (jrodriguezvel@uoc.edu), Cristina Steegmann Pascual (csteegmann@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Un modelo matemático es una descripción, en lenguaje matemático, de un objeto que existe en un universo no-matemático. Estamos familiarizados con las previsiones del tiempo, las cuales se basan en un modelo matemático meteorológico; así como con los pronósticos económicos, basados éstos en un modelo matemático referente a economía.

La mayoría de las aplicaciones de cálculo (por ejemplo, problemas de máximos y mínimos) implican modelos matemáticos.

En términos generales, en todo modelo matemático se puede determinar 3 fases:

- Construcción del modelo. Transformación del objeto no-matemático en lenguaje matemático.
- Análisis del modelo. Estudio del modelo matemático.
- Interpretación del análisis matemático. Aplicación de los resultados del estudio matemático al objeto inicial no-matemático.

El éxito o fracaso de estos modelos es un reflejo de la precisión con que dicho modelo matemático representa al objeto inicial y no de la exactitud con que las matemáticas analizan el modelo.

Algunos modelos son buenos para algunas cosas y malos para otras. Por ejemplo, el modelo matemático de la mecánica newtoniana puede, hoy en día, usarse para predecir muchos sucesos con precisión a pesar de que la teoría de la relatividad de Einstein (otro modelo matemático) nos dice que éste es inexacto.

El álgebra lineal nos proporciona muchas herramientas para utilizarlas al analizar los modelos matemáticos (ya sean económicos, demográficos, probabilísticos, de ingeniería...).

A continuación se presentan tres modelos matemáticos así como la ayuda que nos proporciona el software Mathcad para estudiarlos, analizarlos y solucionarlos.

Éstos son:

- Modelo meteorológico.
- Modelo de petróleo refinado.
- Modelo de Leontief.

OBJETIVOS

- Conocer los fundamentos matemáticos de los modelos matemáticos.
- Aprender a analizar y solucionar los modelos matemáticos con la ayuda del software mathcad.
- Profundizar en las funciones GIVEN, FIND, LSOLVE, RREF de mathcad.
- Aprender el método iterativo de resolución de sistemas de ecuaciones lineales usando mathcad.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable haber leído, previamente, los *math-blocks* relativos a:

- Álgebra de matrices.
- Determinantes.
- Matriz inversa.
- Discusión de SEL.
- Resolución de SEL.
- Así como los introductorios a Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y RESOLUCIÓN PRÁCTICA CON MATHCAD

□ Modelo meteorológico

Supongamos que en una determinada ciudad tenemos tres estados climáticos posibles: soleado, nublado, y lluvioso.

Supongamos, además, que si hoy está el día nublado, entonces la probabilidad de que mañana el día esté soleado es de $1/2$, la probabilidad de que esté nublado es $1/4$, y la probabilidad de que esté

lluvioso es de 1/4. Estos números se conocen como las **probabilidades de transición** de hoy a mañana suponiendo que hoy hemos tenido un día nublado.

De forma similar, es posible considerar otras probabilidades de transición en los casos en que el día de hoy haya estado lluvioso o soleado. Podemos, pues, expresar dichas probabilidades en forma matricial:

| | | HOY | | |
|-----|-------------------|---------|---------|----------|
| | | soleado | nublado | lluvioso |
| A = | MAÑANA soleado | 3/4 | 1/2 | 1/4 |
| | nublado | 1/8 | 1/4 | 1/2 |
| | lluvioso | 1/8 | 1/4 | 1/4 |

$$\text{i.e.: } A := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Si conociésemos la probabilidad de que hoy se dé cada uno de los tres estados climáticos, sería posible usar los datos de esta **matriz de transición** (la cual contiene probabilidades condicionales) para determinar la probabilidad de que mañana se dé cada uno de los estados climatológicos. Veamos cómo:

En primer lugar, dado que usaremos notación matricial convencional, deberemos asegurarnos de que la variable Array Origin de mathcad (ORIGIN) (se puede acceder a ella siguiendo la ruta Math > Options) tiene el valor 1.

Supongamos, p.e., que las probabilidades de cada estado climático para el día de hoy son:

probabilidad de que hoy esté soleado --> 0
 probabilidad de que hoy esté nuboso --> 1/2
 probabilidad de que hoy esté lluvioso --> 1/2

Podemos expresar las probabilidades anteriores mediante un vector de nombre p_0:

$$p_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ es decir, } p_{01} := 0, p_{02} := \frac{1}{2}, \text{ y } p_{03} := \frac{1}{2}$$

Fijémonos que, por ser un vector de probabilidades, sus componentes son siempre positivas y suman 1.

La teoría de la probabilidad nos dice que:

- Probabilidad de que mañana esté soleado = (probabilidad de que hoy esté soleado y mañana esté soleado) + (probabilidad de que hoy esté nublado y mañana esté soleado) + (probabilidad de que hoy esté lluviosos y mañana esté soleado)

Por su parte, el primero de los sumandos anteriores se puede calcular como:

- Probabilidad de que hoy esté soleado y mañana esté soleado = (probabilidad de que hoy esté soleado) · (probabilidad de que mañana esté soleado sabiendo que hoy ha estado soleado)

Y análogamente ocurre con los restantes dos sumandos.

Usando notación simbólica, si denotamos por p_1 al vector que contiene las probabilidades de estados de mañana, tendremos que:

$$\text{prob. de que mañana esté soleado} \rightarrow p_{11} := p_{01} \cdot A_{1,1} + p_{02} \cdot A_{1,2} + p_{03} \cdot A_{1,3}$$

$$\text{prob. de que mañana esté nublado} \rightarrow p_{12} := p_{01} \cdot A_{2,1} + p_{02} \cdot A_{2,2} + p_{03} \cdot A_{2,3}$$

$$\text{prob. de que mañana esté lluvioso} \rightarrow p_{13} := p_{01} \cdot A_{3,1} + p_{02} \cdot A_{3,2} + p_{03} \cdot A_{3,3}$$

$$\text{i.e.,} \quad p_{11} = \frac{3}{8} \quad p_{12} = \frac{3}{8} \quad p_{13} = \frac{1}{4}$$

es decir,

$$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Observad que lo que estamos haciendo para hallar p_1 es el producto entre la matriz de transición A y el vector p_0 , i.e.:

$$p_1 = A \cdot p_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Suponiendo que las probabilidades de transición no varían de un día para otro (es decir, que la matriz de transición es constante con el tiempo), podríamos calcular ahora las probabilidades asociadas a cada estado climático para dentro de dos días, las cuales registraremos en el vector p_2 :

$$\text{prob. de que en dos días esté soleado} \rightarrow p_{21} := p_{11} \cdot A_{1,1} + p_{12} \cdot A_{1,2} + p_{13} \cdot A_{1,3}$$

$$\text{prob. de que en dos días esté nublado} \rightarrow p_{22} := p_{11} \cdot A_{2,1} + p_{12} \cdot A_{2,2} + p_{13} \cdot A_{2,3}$$

$$\text{prob. de que en dos días esté lluvioso} \rightarrow p_{23} := p_{11} \cdot A_{3,1} + p_{12} \cdot A_{3,2} + p_{13} \cdot A_{3,3}$$

$$\text{i.e.,} \quad p_{21} = \frac{17}{32} \quad p_{22} = \frac{17}{64} \quad p_{23} = \frac{13}{64}$$

o, dicho de otro modo:

$$p_2 = A \cdot p_1 = \begin{pmatrix} \frac{17}{32} \\ \frac{17}{64} \\ \frac{13}{64} \end{pmatrix}$$

Obviamente, bajo los supuestos anteriores, es posible ir reiterando este proceso de forma que se vayan obteniendo las probabilidades de cada estado climatológico para dentro de 3, 4, 5, ... , n días. Este proceso reiterativo se conoce con el nombre de **cadena de Markov**.

Las cadenas de Markov tienen un amplio ámbito de aplicación en áreas como la económica y la industrial. Una cuestión interesante que surge en relación con las sucesivas distribuciones de probabilidad que se van obteniendo en el proceso iterativo es: ¿Se llegará a un instante temporal n a partir del cual la distribución se estabilice?, o dicho en otras palabras, ¿se llegará a un instante n a partir del cual el vector p_n y p_{n+1} coincidan? Si esto sucede (i.e.; si $p_n = p_{n+1}$), entonces se dice que tenemos una **distribución estable**.

Analizando las propiedades de la matriz A, veremos cómo esta cuestión se puede responder.

Recordemos que queremos predecir las probabilidades asociadas a cada estado climático, en el futuro. Hemos visto que dada la matriz de transición A y p_0 el vector con la distribución de las probabilidades de cada estado climático para el día de hoy. Entonces, el vector con las probabilidades de los estados climáticos para el día de mañana (p_1) se halla haciendo $A \cdot p_0$; y el vector con las probabilidades de los estados climáticos para dentro de 2 días (p_2) se halla haciendo $A \cdot p_1$, o lo que es lo mismo, $A \cdot A \cdot p_0$. Y así sucesivamente. Esto es:

- $p_1 = A \cdot p_0$
- $p_2 = A^2 \cdot p_0$
- $p_3 = A^3 \cdot p_0$
- \vdots
- $p_k = A^k \cdot p_0$

Demos por demostrado que, en las condiciones del modelo, existe un vector **p** llamado **vector de probabilidad estable** tal que, a partir de un cierto instante n, se cumple que $p_n = p_{n+1} = p$.

Veamos cómo podemos utilizar el software **MATHCAD** para hallar el vector p. Para esto existen varias vías. Dos de ellas son:

- Por **Iteración** del sistema.
- Resolviendo la ecuación matricial **$A \cdot p = p$** .

Estudiemos cada método.

ITERACIÓN

Sea W la matriz tal que: $W^{(i+1)} = A \cdot W^{(i)}$. Esto es, la (i+1)-ésima columna de W, $W^{(i+1)}$, es el vector de distribución de probabilidad para los estados climáticos del día i. ($W^{(i+1)}$ es el vector p_i calculado anteriormente)

1. Definimos la matriz de transición:

$$A := \begin{pmatrix} .75 & .5 & .25 \\ .125 & .25 & .5 \\ .125 & .25 & .25 \end{pmatrix}$$

2. Imponemos el número de iteraciones a realizar, por ejemplo, 10:

$$i := 2.. 11$$

3. Definimos el primer vector de probabilidad, el del día de hoy, p_0 :

$$W^{(1)} := \begin{pmatrix} 0 \\ .5 \\ .5 \end{pmatrix}$$

4. Indicamos el proceso de iteración:

$$W^{(i)} := A \cdot W^{(i-1)}$$

5. Indicamos W , pulsamos sobre el signo de igualdad, y aparece:

$$W =$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0 | 0.375 | 0.531 | 0.582 | 0.6 | 0.606 | 0.608 | 0.608 | 0.609 | 0.609 |
| 2 | 0.5 | 0.375 | 0.266 | 0.234 | 0.223 | 0.219 | 0.218 | 0.218 | 0.217 | 0.217 |
| 3 | 0.5 | 0.25 | 0.203 | 0.184 | 0.177 | 0.175 | 0.174 | 0.174 | 0.174 | 0.174 |

Nota: Desplazándonos por la barra se ven todos los resultados obtenidos.

Observemos cómo efectivamente las componentes del vector W^2 coincide con las del vector p_1 hallado anteriormente.

Cambemos, ahora, el vector de probabilidad inicial por otro de componentes:

$$W^{(1)} := \begin{pmatrix} .3 \\ .5 \\ .2 \end{pmatrix}$$

y recalculamos los vectores de probabilidad para los 10 días siguientes:

$$W^{(1)} := \begin{pmatrix} .3 \\ .5 \\ .2 \end{pmatrix}$$

$$W^{(i)} := A \cdot W^{(i-1)}$$

$$W = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0.3 & 0.525 & 0.578 & 0.598 & 0.605 & 0.607 & 0.608 & 0.609 & 0.609 & 0.609 \\ 2 & 0.5 & 0.263 & 0.238 & 0.224 & 0.22 & 0.218 & 0.218 & 0.217 & 0.217 & 0.217 \\ 3 & 0.2 & 0.213 & 0.184 & 0.178 & 0.175 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 \end{array}$$

Observemos que en ambos casos, a partir de la 7ª iteración, el resultado coincide.

Parece, pues, que el "candidato" a ser el vector p es:

$$\begin{pmatrix} .609 \\ .217 \\ .174 \end{pmatrix}$$

Comprobemos qué sucede si ponemos otro vector inicial:

$$W^{(1)} := \begin{pmatrix} .25 \\ .25 \\ .5 \end{pmatrix}$$

$$W^{(i)} := A \cdot W^{(i-1)}$$

$$W = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0.25 & 0.438 & 0.555 & 0.59 & 0.602 & 0.607 & 0.608 & 0.608 & 0.609 & 0.609 \\ 2 & 0.25 & 0.344 & 0.25 & 0.229 & 0.221 & 0.219 & 0.218 & 0.218 & 0.217 & 0.217 \\ 3 & 0.5 & 0.219 & 0.195 & 0.181 & 0.176 & 0.175 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 \end{array}$$

También coincide. Parece que la "predicción" se está cumpliendo. Pero aún no es posible generalizarla. Probemos, ahora, qué sucede si el vector inicial es el vector "candidato":

$$W^{(1)} := \begin{pmatrix} .609 \\ .217 \\ .174 \end{pmatrix}$$

$$W^{(i)} := A \cdot W^{(i-1)}$$

$$W = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.609 & 0.609 \\ 2 & 0.217 & 0.217 & 0.217 & 0.217 & 0.217 & 0.217 & 0.217 & 0.217 & 0.217 & 0.217 \\ 3 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 & 0.174 \end{array}$$

¡Ahora sí! Podemos afirmar que **el vector de probabilidad estable, p** , es:

$$\begin{pmatrix} .609 \\ .217 \\ .174 \end{pmatrix}$$

ya que al hacer las iteraciones hemos comprobado cómo cumplía que $A.p=p$. Puesto que hemos encontrado el vector de probabilidad estable podemos concluir que la distribución de probabilidad obtenida en el proceso iterativo (i.e. en la cadena de Markov) es **estable**; es decir, llega un instante en que se estabiliza.

La pregunta obvia que nos haremos es; ¿Por qué se obtiene el mismo resultado cambiando el vector inicial p_0 ?

Y la respuesta es muy sencilla. Porque la matriz de transición A no varía. Utilizamos la misma matriz para hallar el pronóstico en el futuro y no importa a partir de qué día en particular partamos.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN MATRICIAL $A.p=p$

Resolver la ecuación matricial $A.p=p$ es equivalente a resolver la siguiente: $(A-I).p=0$; donde A es la matriz de transición, I es la matriz Identidad y p es el vector de probabilidad estable buscado.

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$(A-I)$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} .75 - 1 & .5 & .25 \\ .125 & .25 - 1 & .5 \\ .125 & .25 & .25 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$(A-I).p=0$ representa resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolverlo haremos uso de la función **rref**:

$$\text{rref} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como vemos, existe un número infinito de vectores p tales que $A \cdot p = p$.

Ya que hemos llegado al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x - 3,5z &= 0 \\ y - 1,25z &= 0 \end{aligned}$$

Pero sólo uno de estos vectores puede ser el que corresponde al estado estable del proceso de Markov. Recordemos que estamos tratando con probabilidades; por lo tanto, la ecuación que debemos añadir al anterior sistema es aquella en la que se impone que la suma de las componentes del vector p debe ser 1: $x + y + z = 1$

Veamos qué sucede al imponer dicha condición:

$$\begin{aligned} x - 3,5z &= 0 \\ y - 1,25z &= 0 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Matricialmente, el sistema anterior, se puede expresar así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & -1.25 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & -1.25 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos la función **Isolve** para resolver el sistema:

$$\text{Isolve}(A, v) = \begin{pmatrix} 0.609 \\ 0.217 \\ 0.174 \end{pmatrix}$$

Nota: Si para resolver el sistema anterior utilizamos la función Isolve nos aparecerá error ya que se trata de un sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. En el caso de que, al resolver un sistema mediante la función Isolve, aparezca error es preferible utilizar la función rref.

Y, finalmente, comprobamos que **el vector p de probabilidad estable** es:

$$\begin{pmatrix} .609 \\ .217 \\ .174 \end{pmatrix}$$

que coincide con la misma solución hallada por el método de iteración.

En conclusión, el proceso estudiado tiene una **distribución de probabilidad estable**.

*Nota: Podemos seleccionar la forma en la que obtener los resultados numéricos (**decimal o fraccionaria**) pulsando sobre **Format**, seleccionando luego **Result** y, por último, **Number Format**.*

□ Modelo de petróleo refinado [W3]

Una compañía representa a tres refinerías de petróleo. Llamémoslas **Refinería 1**, **Refinería 2** y **Refinería 3**. Cada refinería produce tres productos basados en el crudo: **Alquitrán**, **Gasóleo** y **Gasolina**.

Supongamos que, de un barril de petróleo, se sabe que:

- la primera refinería produce 4 litros de alquitrán, 2 de gasóleo, y 1 de gasolina.
- la segunda refinería produce 2 litros de alquitrán, 5 de gasóleo y 2.5 de gasolina
- y la tercera refinería produce 2 litros de alquitrán, 2 de gasóleo y 5 de gasolina.

Supongamos que hay una demanda de estos productos de la siguiente manera:

- 600 litros de alquitrán.
- 800 litros de gasóleo.
- 1000 litros de gasolina.

¿Cuántos barriles de crudo necesitará cada refinería para satisfacer la demanda?

El enunciado se puede representar de la siguiente forma:

| | | Refinería 1 | Refinería 2 | Refinería 3 |
|-----------|------------------|-------------|-------------|-------------|
| A= | Alquitrán | 4 | 2 | 2 |
| | Gasóleo | 2 | 5 | 2 |
| | Gasolina | 1 | 2.5 | 5 |

Cada columna de **A** representa un vector con la producción de una refinería.

Cada fila de **A** representa un vector con las cantidades de un producto en particular producido por las diferentes refinerías.

Por ejemplo:

La producción de la refinería 3 viene reflejada en el vector:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La producción de gasolina viene reflejada en el vector:

$$(1 \ 2.5 \ 5)$$

Sea x_i el número de barriles de petróleo crudo necesarios en la refinería i .

Según esto, el número de barriles de crudo necesarios para satisfacer esta demanda por las tres refinerías deben satisfacer el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 600$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 800$$

$$1x_1 + 2.5x_2 + 5x_3 = 1000$$

Matricialmente, podemos expresar así el sistema anterior:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 800 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Utilizando la función `rref` nos devuelve una matriz que representa la forma reducida de la matriz dada.

Para ello introducimos la matriz ampliada, i.e., con coeficientes y términos independientes:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 600 \\ 2 & 5 & 2 & 800 \\ 1 & 2.5 & 5 & 1000 \end{pmatrix}$$

$$\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 31.25 \\ 0 & 1 & 0 & 87.5 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{pmatrix}$$

O bien podríamos calcularla directamente:

$$\text{rref} \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 600 \\ 2 & 5 & 2 & 800 \\ 1 & 2.5 & 5 & 1000 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 31.25 \\ 0 & 1 & 0 & 87.5 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{pmatrix}$$

Llegamos a la solución del modelo.

$$x_1 = 31.25$$

$$x_2 = 87.5$$

$$x_3 = 150$$

La **Refinería 1** necesitará **31.25** barriles de crudo.

La **Refinería 2** necesitará **87.5** barriles de crudo.

La **Refinería 3** necesitará **150** barriles de crudo.

Si ahora quisiéramos saber cuánto debe producir cada refinería de cada producto para satisfacer la demanda, tan sólo tendríamos que repartir proporcionalmente la cantidad de los barriles hallados anteriormente.

Refinería 1:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 31.25 = \begin{pmatrix} 125 \\ 62.5 \\ 31.25 \end{pmatrix}$$

Refinería 2:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \cdot 87.5 = \begin{pmatrix} 175 \\ 437.5 \\ 218.75 \end{pmatrix}$$

Refinería 3:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 150 = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \\ 750 \end{pmatrix}$$

Con lo que llegaríamos a la siguiente conclusión:

Para satisfacer la demanda:

- la **Refinería 1** debería producir: **125 litros de alquitrán; 62,5 litros de gasóleo y 31,25 litros de gasolina.**
- la **Refinería 2** debería producir: **175 litros de alquitrán; 437,5 litros de gasóleo y 218,75 litros de gasolina.**
- la **Refinería 3** debería producir: **300 litros de alquitrán; 300 litros de gasóleo y 750 litros de gasolina.**

O lo que es lo mismo:

- los 600 litros de alquitrán serán producidos así: 125 por la Refinería 1; 175 por la Refinería 2 y 300 por la Refinería 3.
- los 800 litros de gasóleo serán producidos así: 62,5 por la Refinería 1; 437,5 por la Refinería 2 y 300 por la Refinería 3.
- los 1000 litros de gasolina serán producidos así: 31,25 por la Refinería 1; 218,75 por la Refinería 2 y 750 por la Refinería 3.

□ **Modelo de Leontief**

El objetivo de este modelo es encontrar el equilibrio entre oferta y demanda en una economía. Para cada sector industrial, supondremos que hay una ecuación que relaciona oferta y demanda. Un modelo de Leontief de un país puede llegar a tener miles de estas ecuaciones. Para simplificar, consideraremos un modelo con sólo tres sectores industriales: energía, construcción, y transporte.

$$\begin{array}{l} \text{Oferta} \\ \text{Energía} \end{array} \begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{Construcción} \\ \text{Transporte} \end{array} \begin{array}{l} \text{--- demanda de los sectores ---} \\ x \\ y \\ z \end{array} = \begin{array}{l} \text{Demanda_consumidor} \\ 100 \end{array}$$

$$x = 0.4x + 0.2y + 0.1z + 100$$

$$\begin{array}{l} \text{Construcción} \quad y = 0.2x + 0.4y + 0.1z + 50 \\ \text{Transporte} \quad z = 0.15x + 0.2y + 0.2z + 100 \end{array}$$

En la tabla anterior, el lado izquierdo de cada ecuación representa la oferta existente de cada factor (energía, construcción, y transporte) medida en euros.

Por su parte, el lado derecho de cada ecuación representa las demandas, las cuales son de dos tipos: de un lado, encontramos las demandas de cada sector (i.e., la cantidad, medida en euros, de recursos necesarios para producir la oferta); de otro lado, tenemos la demanda, en euros, de los consumidores.

Así, la oferta total de energía sería de:

$$\text{oferta total de energía} \rightarrow x \text{ euros}$$

mientras que la demanda total de energía sería de:

$$\text{demanda total de energía} \rightarrow 0.4x + 0.2y + 0.1z + 100 \text{ euros}$$

donde y y z será la cantidad ofertada de "construcción" y z de "transporte" (ambas en euros).

La pregunta fundamental de un modelo de Leontief es: ¿Cuántas unidades, en euros, de cada factor (energía, construcción y transporte) se debe producir (y ofertar) para asegurar que la demanda del consumidor está satisfecha?

Si existe solución para el sistema anterior, decimos que el modelo está en **equilibrio** (la oferta de cada factor coincide con su demanda).

Observemos, además, que de la tabla anterior también se deduce lo siguiente: En esta economía, por cada unidad ofertada de "energía", se necesitan emplear $0.4 + 0.2 + 0.15 = 0.75 < 1$ unidades de energía. Algo similar ocurre con los otros dos factores.

La **restricción del modelo de Leontief** es que la suma de las unidades necesarias emplear de cada factor (energía, construcción y transporte) debe ser inferior a 1. Esto es, $0.4 + 0.2 + 0.15 < 1$; $0.2 + 0.4 + 0.2 = 0.8 < 1$ y $0.1 + 0.1 + 0.2 < 1$.

Podemos usar Mathcad para intentar resolver el sistema anterior. Existen varios métodos para ello. En el *math-block* sobre resolución de sistemas de ecuaciones lineales están explicados detalladamente cada uno de los métodos siguientes por lo que, si se desea, se puede ampliar la información en éste. Veámoslos:

Método 1 de resolución: GIVEN y FIND

En primer lugar, asignamos valores iniciales (cualesquiera) a las variables:

$$x := 10 \quad y := 20 \quad z := 30$$

i.e. hacemos una "predicción" a la que podría ser la solución del sistema.

Definimos ahora el sistema, usando la instrucción **Given**. Escribid la palabra "Given"; así se indica a Mathcad que lo que le sigue a continuación es un sistema de ecuaciones. Podéis escribir "Given" con cualquier tipo de letra, sólo tenéis que asegurarnos de no escribirla en una región de texto (debe ser en una región matemática)

Given

Ahora escribiremos el sistema de ecuaciones, usando el signo "=" que aparece en la barra de herramientas **Boolean**:

$$\begin{aligned}x &= 0.4x + 0.2y + 0.1z + 100 \\y &= 0.2x + 0.4y + 0.1z + 50 \\z &= 0.15x + 0.2y + 0.2z + 100\end{aligned}$$

Finalmente, usaremos la función **Find** (se halla en **Insert** ⇒ **Function**):

$$u := \text{Find}(x, y, z) \qquad u = \begin{pmatrix} 276.316 \\ 213.816 \\ 230.263 \end{pmatrix}$$

Como hemos encontrado la solución al sistema anterior, podemos afirmar que **el modelo de Leontief anterior está en equilibrio**.

Método 2 de resolución: LSOLVE

Una forma alternativa de resolver el sistema anterior es usar notación matricial. Para ello, reescribimos el sistema como:

$$\begin{aligned}0.6x - 0.2y - 0.1z &= 100 \\-0.2x + 0.6y - 0.1z &= 50 \\-0.15x - 0.2y + 0.8z &= 100\end{aligned}$$

Por lo que la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes serán:

$$A := \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.6 & -0.1 \\ -0.15 & -0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$v := \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Recurrimos a la función **Isolve** (se halla en **Insert** ⇒ **Function**):

$$u := \text{Isolve}(A, v)$$

$$u = \begin{pmatrix} 276.316 \\ 213.816 \\ 230.263 \end{pmatrix}$$

Como, de nuevo, hemos encontrado la solución al sistema anterior, podemos afirmar que **el modelo de Leontief anterior está en equilibrio**.

Método 3 de resolución: RREF

Utilizando la notación matricial, podemos comprobar que el modelo está en **equilibrio** utilizando la función **rref**, la cual devuelve una matriz que representa la forma de filas reducidas de la matriz dada.

Para ello introducimos la matriz ampliada, i.e., con coeficientes y términos independientes:

$$A := \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.1 & 100 \\ -0.2 & 0.6 & -0.1 & 50 \\ -0.15 & -0.2 & 0.8 & 100 \end{pmatrix}$$

Y utilizamos la función **rref**:

$$\text{rref} \left(\begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.1 & 100 \\ -0.2 & 0.6 & -0.1 & 50 \\ -0.15 & -0.2 & 0.8 & 100 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 276.316 \\ 0 & 1 & 0 & 213.816 \\ 0 & 0 & 1 & 230.263 \end{pmatrix}$$

Y otra vez hemos encontrado la solución al sistema anterior, por lo que podemos afirmar que **el modelo de Leontief anterior está en equilibrio.**

Método 4 de resolución: ITERACIÓN

Asimismo podemos resolver el sistema anterior haciendo iteración (repetición de un proceso):

Sea D la matriz de las demandas industriales, c la demanda del consumidor y u el vector oferta de forma que el sistema para el cual deseamos saber si tiene solución es el siguiente:

$$u = D \cdot u + c$$

donde:

$$D := \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$u := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Proceso de iteración:

$$s^{(1)} := c$$

$$j := 1..35$$

Hacemos 36 iteraciones, pero se podrían hacer tantas como quisiéramos

$$s^{(j+1)} := D \cdot s^{(j)} + c$$

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| s = | 100 | 160 | 198.5 | 224 | 241.088 | 252.582 | 260.324 | 265.539 | 269.054 |
| | 50 | 100 | 136.5 | 161.6 | 178.608 | 190.086 | 197.824 | 203.04 | 206.554 |
| | 100 | 145 | 173 | 191.675 | 204.255 | 212.736 | 218.452 | 222.304 | 224.9 |

Comprobamos que, a partir de la iteración nº 32, el resultado coincide. Por tanto, el vector, u, buscado coincide con el hallado por los otros métodos:

$$u := \begin{pmatrix} 276.316 \\ 213.816 \\ 230.263 \end{pmatrix}$$

Y de nuevo hemos encontrado la solución al sistema anterior, por lo que podemos afirmar que **el modelo de Leontief anterior está en equilibrio.**

Método 5 de resolución: MATRIZ INVERSA

También podemos resolver el sistema anterior utilizando la matriz inversa.

Recordemos el sistema del que partíamos:

| | | | | | |
|--------------|--------|----------|--------------|------------|--------------------|
| | Oferta | Energía | Construcción | Transporte | Demanda_consumidor |
| Energía | x = | 0.4 x + | 0.2 y + | 0.1 z + | 100 |
| Construcción | y = | 0.2 x + | 0.4 y + | 0.1 z + | 50 |
| Transporte | z = | 0.15 x + | 0.2 y + | 0.2 z + | 100 |

Sea D la matriz de las demandas industriales, c la demanda del consumidor y u el vector oferta de forma que el sistema para el cual deseamos saber si tiene solución es el siguiente:

$$u = D \cdot u + c$$

donde:

$$D := \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$u := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Podemos afirmar:

La restricción de Leontief implica, automáticamente, que todo modelo de Leontief está en equilibrio (y, por lo tanto, tiene solución).

Debido a la restricción de Leontief, se llega a que la suma absoluta de la matriz D, y podemos afirmar que la matriz inversa de la matriz (I-D) existe. Se puede ampliar esta información en [2].

Por tanto, llegamos a la conclusión de que el vector solución, u , existe y, en consecuencia, el sistema tiene solución y está en equilibrio.

El vector solución, u , se puede hallar de la siguiente forma:

$$u = (I - D)^{-1} \cdot c$$

Volvamos al caso concreto que estamos tratando:

$$D := \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$u := (I - D)^{-1} \cdot c$$

$$u = \begin{pmatrix} 276.316 \\ 213.816 \\ 230.263 \end{pmatrix}$$

En conclusión, se ha visto que, sea por el método que sea, el modelo de Leontief está en **equilibrio**; esto es, la oferta de cada factor (energía, construcción, transporte) coincide con la demanda de éstos realizada por el consumidor

Y las cantidades totales ofertadas, en euros, necesarias para satisfacer la demanda del consumidor son:

- 276.316 euros de energía
- 213.816 euros de construcción
- 230.263 euros de transporte

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Montes Lozano, A (1998): "Álgebra", Ediciones UOC, Módulo 3: "Matrices, vectores y sistemas de ecuaciones lineales".
- [2] G. J. Porter, D. R. Hill (1996): "Interactive Linear Algebra. A laboratory course using Mathcad", Springer-Verlag New York, Inc., Chapter 0.

- [3] H. Benker (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc., 211 - 218
- [4] J. A. Moreno, D. Ser (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A., 186
- [5] Doucet & Sloep (1992): "Mathematical Modeling in the Life Sciences", Ellis Horwood.
- [6] Giordano, Weir & Fox (1997): "A first Course in Mathematical Modeling", Brooks/Cole.

ENLACES

□ Modelos matemáticos

- [W1] <http://cuhwww.upr.clu.edu/~pnm/presentations/contaminacion/tsld009.htm>
Métodos matemáticos para **transporte y difusión**.
- [W2] http://almeria.cedex.es/CEPYC/info/orga/mode/mode_1.html
Modelos matemáticos del **Centro de Estudios de Puertos y Costas del CEDEX**
- [W3] <http://www.cepis.ops-oms.org/bvsaca/e/modemate.html>
Modelos matemáticos de **calidad de agua**.
- [W4] <http://www.oea.org/usde/publications/Unit/oea35s/ch22.htm>
Modelos matemáticos de **desarrollo económico**.
- [W5] <http://webs.demasiado.com/geoconceptos/seamer.html>
Modelos matemáticos de la **hidrodinámica y del medio ambiente marino**.
- [W6] http://www.geocities.com/regula_cl/
Modelos matemáticos de **regulación forestal**.
- [W7] http://www.gams.com/docs/contributed/modelado_en_gams.pdf
Documento que trata los modelos matemáticos de **optimización**.
- [W8] <http://www.quasar.cl/modelos.htm>
Modelos matemáticos de **dispersión de material particulado**.
- [W9] http://www.igme.es/internet/web_aguas/igme/publica/pdf/3/pdf/lib26/46a_po.pdf
Documento que trata los modelos matemáticos aplicables en **problemas de intrusión marina** desde el punto de vista del usuario hidrogeólogo.
- [W10] http://www.people.virginia.edu/~am2zb/cursos/res_prob/modelos.htm
Apuntes generales sobre cómo construir modelos para matematizar problemas.
- [W11] <http://arneson.cornell.edu/OLplpath/Principi/Epidem2/Pa9104t1.htm>
Modelos matemáticos aplicados a la **epidemiología de las enfermedades de las plantas**.
- [W12] <http://merlin.fae.ua.es/carmen/docenciam.html>
Modelos matemáticos para la **economía**.

□ Cadenas de Markov

- [W13] <http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/linalg/markov/contents.html>
Ejemplos de cadenas de Markov con mathcad.
- [W14] <http://ingenet.ulpgc.es/~ablesa/markov/markovpreface.htm>
Análisis de Markov.
- [W15] http://mailweb.udlap.mx/~tesis/lis/clemente_f_e/apendiceC.html
Entrenamiento y comparación de un nuevo reconocedor de propósito general basado en redes neuronales y modelos ocultos de Markov.
- [W16] http://www-eio.upc.es/seccio_fme/teaching/meio/SolMa271097v6.html
Ejemplo de cadena de Markov.
- [W17] <http://www.itlp.edu.mx/publica/tutoriales/investoper2/tema43.htm>
Formulación en las cadenas de Markov.
- [W18] <http://wwwest.uniandes.edu.co/~griano/Markov/markov.html>
Programa permite al estudiante experimentar con cadenas de Markov. Es una herramienta didáctica, no apta para análisis serios.
- [W19] http://www.astrocosmo.cl/biografi/b-a_markov.htm
Biografía de Andrei Andreyevich Markov.
- [W20] http://usuarios.lycos.es/JAVICA/Simulacion/Cadenas_de_Markov.htm
Introducción a las Cadenas o Procesos de Markov.

□ Modelos de Leontief

- [W21] <http://www.eumed.net/cursecon/economistas/leontief.htm>
Página web sobre Wassily Leontief en donde se puede leer una explicación sencilla sobre las [tablas input-output](#), y el artículo en español de Leontief: [Supuestos teóricos y hechos no observados](#)
- [W22] http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES/unam/problems/115-116/sec_25.html
Bibliografía-hemerografía principal de Wassily Leontief.
- [W23] http://www.geocities.com/alcaide_econoh/wasily_leontief.htm
Relaciones input-output o interindustriales
- [W24] http://www.ti.com/calc/spain/pdf/pag2_3.pdf
El modelo de Leontief. La ti-92 como instrumento de apoyo en su presentación.
- [W25] <http://ladb.unm.edu/aux/econ/cuadeco/1994/july/explicacion.html>
"UNA EXPLICACIÓN ALTERNATIVA DE LA PARADOJA DE LEONTIEF" Cuadernos de Economía (07/01/94). Colombia. Publicación del Departamento de Teoría y Política Económica, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Colombia, Santafé de Bogotá, Columbia
- [W26] <http://www.iea.junta-andalucia.es/mioan95/>
Sistema de cuentas económicas de Andalucía. Marco Input-Output 1995.