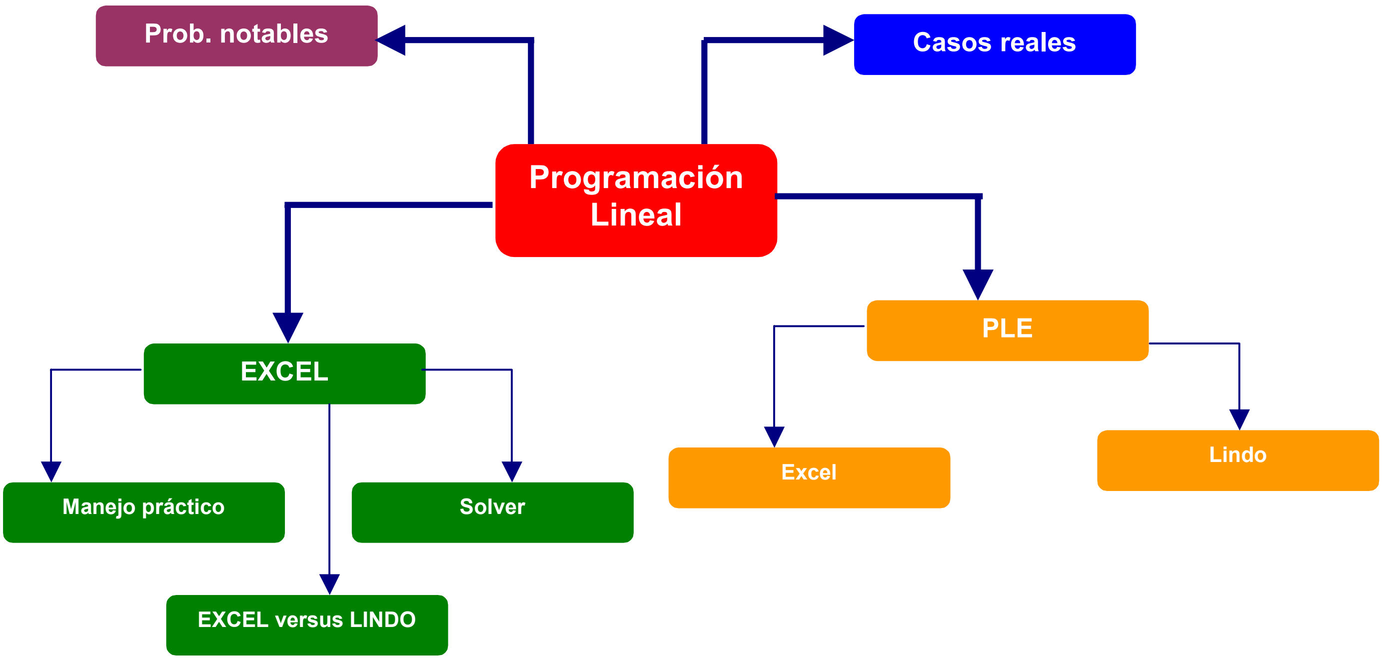
PROGRAMACIÓN LINEAL Y PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA CON EXCEL Y LINDO

Autores: Javier Faulín (ffaulin@uoc.edu), Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

La programación lineal y la programación lineal entera (cuando las variables del problema sean números enteros) constituyen actualmente el eje y fundamento de otras muchas técnicas de Investigación Operativa. Ambas técnicas sirven de soporte en la toma de decisiones en muchas áreas del conocimiento humano. Por ello, un conocimiento inmediato de la manera de resolver programas lineales y lineales enteros proporciona a la persona responsable de tomar decisiones un arma poderosa para ser usada en un ambiente de incertidumbre. La resolución efectiva de este tipo de programas puede llevarse a cabo con ayuda de la hoja de cálculo Excel o bien a través de programas especializados como Lindo. El conocimiento de problemas lineales notables sirve para el diseño de la resolución de nuevos problemas sin plantear.

La utilidad informática Excel ha despertado un gran interés desde el punto de vista docente para la enseñanza de las técnicas cuantitativas, de tal forma que son numerosas las referencias actualizadas de libros de Estadística e Investigación Operativa, que explican estas materias con el uso de esa hoja de cálculo. Además, Excel se ha convertido en una herramienta habitual en la Gestión de Empresas, logrando resolver con acierto numerosos problemas de la empresa concernientes con temas muy diversos como son: Matemáticas, Estadística, Investigación Operativa, Contabilidad, Toma de decisiones, Inversión, Financiación, Producción, Marketing,... entre otros. Se hace preciso pues conocer esta herramienta informática integradora.

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

OBJETIVOS

- Introducirse en el uso de Excel para la resolución de programas lineales, conociendo sus ventajas e inconvenientes.
- Aprender a resolver programas lineales usando la aplicación informática Microsoft Excel.
- Saber resolver, con la ayuda de Lindo o Excel, problemas de programación lineal entera.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable que el lector tenga unos conocimientos básicos de Matemáticas a nivel de Bachillerato o equivalente. También son necesarios conocimientos básicos de la hoja de cálculo Excel. Asimismo, es aconsejable haber leído previamente el *math-block* **Introducción a la Investigación Operativa**.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y CASOS CON SOFTWARE

❑ Resolución de programas lineales con la hoja de cálculo Excel

En la actualidad, no sólo los programas especializados como el LINDO permiten resolver los problemas de PL. También las hojas de cálculo como EXCEL ofrecen esta posibilidad mediante la macro **Solver**. EXCEL es capaz de resolver en cuestión de segundos problemas de hasta 200 variables y 500 restricciones, ofreciendo además las ventajas de una hoja de cálculo en cuanto a presentación, estudio de "escenarios", etc. Si se requiere de una capacidad aún mayor, es posible recurrir a los creadores de la macro (www.frontsys.com) para obtener una versión más potente de la misma.

Nada mejor que ver un ejemplo para ilustrar cómo funciona este programa:

Ejemplo: Una fábrica de vasos utiliza en el proceso de producción una máquina con 60 horas de disponibilidad por semana. Los vasos producidos durante una semana se van almacenando hasta el final de la misma, momento en que son enviados a las casas de distribución. La empresa ofrece dos tipos de vasos: para zumo (Z) y vasos vino (V). La máquina necesita 6 horas para producir 100 cajas de Z, y 5 horas para producir 100 cajas de V. Cada caja de Z requiere de 100 cc (centímetros cúbicos) para su almacenamiento, mientras que cada caja de V necesita 200 cc. Los almacenes tienen una capacidad máxima de 150.000 cc. El beneficio por cada caja de Z producida es de 5 €, y 4.5 € el de cada caja de V. El departamento de marketing estima que es posible vender tantos V como sean producidos, pero sólo un máximo de 800 cajas de Z por semana. Determinar la producción semanal que maximiza los beneficios de la empresa.

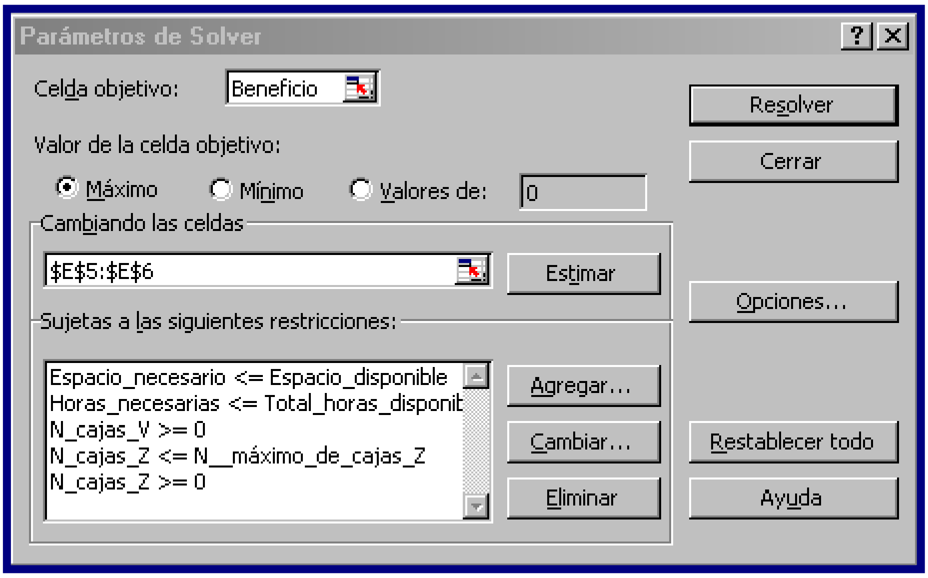
Llamando X = "nº cajas de Z producidas" , e Y = "nº cajas de V producidas" , el planteamiento será:

```
Maximizar:    5 X   +   4.5 Y
Sujeto a:
              0.06 X   +   0.05 Y   <=   60
               100 X   +   200  Y   <=   150000
                            X   <=   800
                            X , Y   >=   0
```

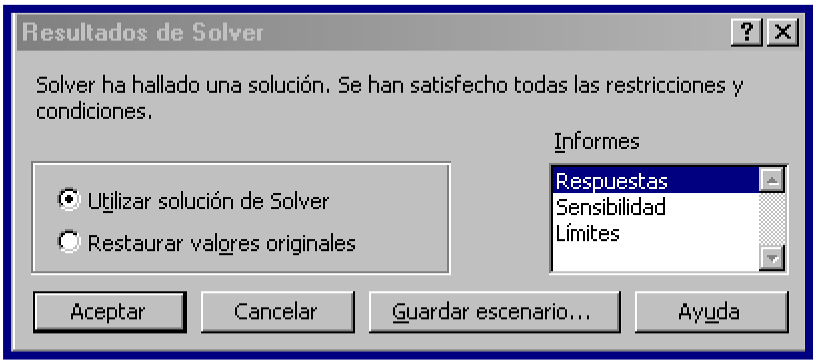
El siguiente paso es diseñar la hoja de cálculo, resultando conveniente en este punto asignar nombres a las celdas que intervengan en las restricciones (mediante la opción ***Insertar > Nombre > Definir***), de forma que los resultados del programa sean más fáciles de interpretar:

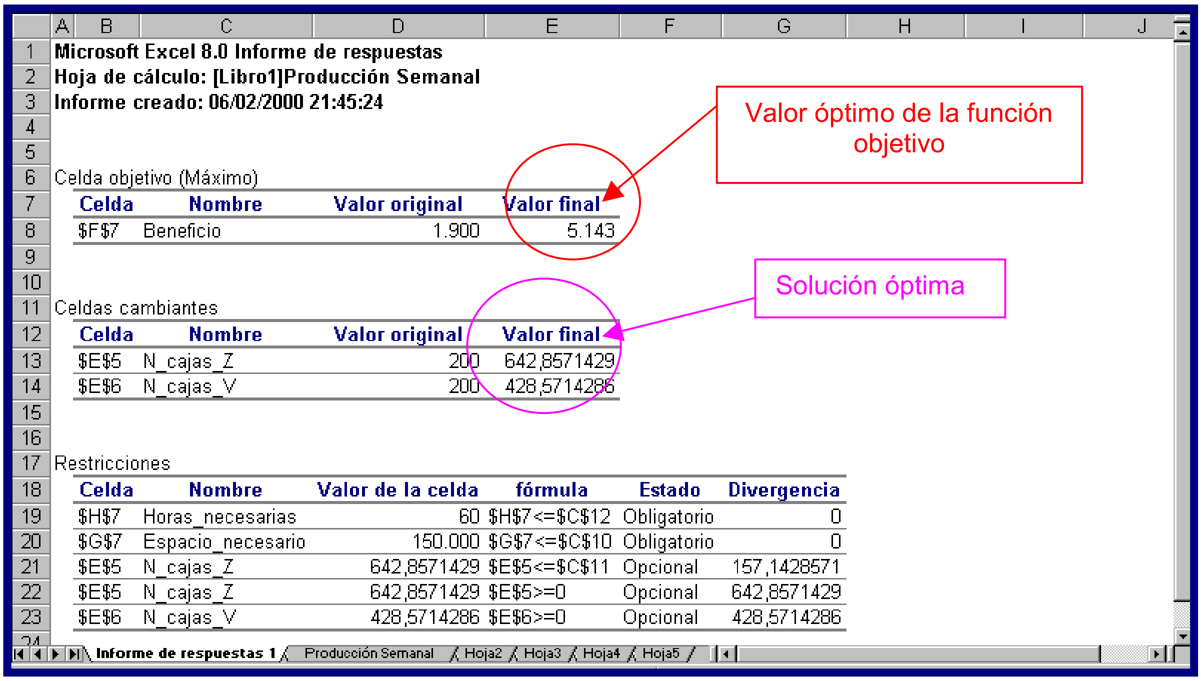
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Determinación de la Producción Semanal de Vasos usando Solver							
2								
3								
4	Tipos de vasos	Horas de trabajo necesarias para cada	Espacio requerido por cada caja	Beneficio por caja (€)	Nº de cajas	Beneficio Total (€)	Espacio Total (cc)	Horas totales necesarias
5	Zumo (Z)	0,06	100	5	200	1.000	20.000	12
6	Vino (V)	0,05	200	4,5	200	900	40.000	10
7				Totales:	400	1.900	60.000	22
8								
9		Restricciones						
10		Espacio disponible:	150.000					
11		Nº máximo de cajas Z:	800					
12		Total horas disponible:	60					
13								

Ahora, deberemos seleccionar la opción **Solver** que se encuentra en el menú de **Herramientas**. Nos aparecerá la ventana de diálogo de la macro, en la cual introduciremos \$F\$7 como la celda a maximizar (o el nombre que le hayamos dado), siendo \$E\$5 y \$E\$6 las variables a ajustar. Finalmente, tendremos que especificar todas las restricciones del problema, incluidas las de no negatividad de las variables (a menos que ya hayamos seleccionado estas últimas restricciones por defecto en **Opciones**).



Ya sólo resta hacer clic sobre el botón **Resolver**, y el programa nos devolverá la solución de este problema: hay que producir 643 vasos semanales de zumo (Z) y 429 de vino (V), lo cual nos dará unos beneficios de 5.143 €. El programa también nos preguntará si queremos algún informe complementario. De momento, nos limitaremos a solicitar un informe sobre las **Respuestas**:





Microsoft Excel 8.0 Informe de respuestas
Hoja de cálculo: [Libro1]Producción Semanal
Informe creado: 06/02/2000 21:45:24

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$F$7	Beneficio	1.900	5.143

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$E$5	N_cajas_Z	200	642,8571429
$E$6	N_cajas_V	200	428,5714286

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$H$7	Horas_necesarias	60	$H$7<=$C$12	Obligatorio	0
$G$7	Espacio_necesario	150.000	$G$7<=$C$10	Obligatorio	0
$E$5	N_cajas_Z	642,8571429	$E$5<=$C$11	Opcional	157,1428571
$E$5	N_cajas_Z	642,8571429	$E$5>=0	Opcional	642,8571429
$E$6	N_cajas_V	428,5714286	$E$6>=0	Opcional	428,5714286

Ejemplos de resolución de programas lineales con Lindo

Ejemplo: Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores de grandes prestaciones, el A4 y el B5. La empresa tiene contratados cinco técnicos, cada uno de los cuales ha de trabajar exactamente 160 horas al mes en la línea de ensamblaje (los directivos insisten en que cada técnico ha de estar trabajando durante todas las horas que se le pagan). El ensamblaje de cada A4 requiere de 20 horas de técnico, mientras que el de cada B5 necesita 25. La empresa quiere que durante el próximo mes se produzcan no menos de 10 A4 y 15 B5. Cada A4 genera unos beneficios de 1.200 €, y cada B5 de 1.800 €. Determinar el número de cada modelo a producir durante el próximo mes de manera que se maximicen los beneficios.

Sean: X = "nº ordenadores de tipo A4 a construir", e Y = "nº ordenadores de tipo B5 a construir".

Usaremos LINDO para resolver este problema (aunque también podría resolverse con EXCEL):

```
MAX      1200 X + 1800 Y

ST
    20X + 25Y  = 800
            X >= 10
            Y >= 15

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)       55200.00
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X        10.000000          0.000000
         Y        24.000000          0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         72.000000
        3)         0.000000       -240.000000
        4)         9.000000          0.000000
 NO. ITERATIONS=        2
```

Como se aprecia en la ventana de output, deberíamos fabricar 10 ordenadores A4 y 24 ordenadores B5, con lo que conseguiríamos unos beneficios de 55.200 €.

Ejemplo: Una prestigiosa entidad financiera ha analizado y recomendado dos paquetes de acciones (pertenecientes a dos compañías diferentes) a los miembros de un club de inversores. Los inversores estaban interesados en factores tales como el crecimiento a corto y medio plazo de las acciones, y las tasas de dividendos de las mismas. Las estimaciones de la entidad se muestran en la tabla siguiente:

	PAQUETES DE ACCIONES	
FACTORES	Compañía Eléctrica	Compañía de Seguros
Potencial de crecimiento a corto plazo por cada euro invertido	0,36	0,24
Potencial de crecimiento a medio plazo por cada euro invertido	1,67	1,50
Tasa potencial de dividendos	4%	8%

Los miembros del club tienen como objetivos a conseguir: (1) una ganancia de al menos 720 € a corto plazo, (2) una ganancia de al menos 5.000 € a medio plazo, y (3) unos ingresos por dividendos de no menos de 200 € por año. ¿Cuál es la cantidad mínima que deberá invertir cada miembro a fin de lograr sus pretensiones?.

Sean: X = "Euros invertidos en acciones eléctricas" , e Y = "Euros invertidos en acciones de seguros".

```
MIN     X + Y

ST
corto)  0.36X + 0.24Y >=  720
medio)  1.67X + 1.50Y >= 5000
divid)  0.04X + 0.08Y >=  200

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       1
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)       3179.348
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X        1358.695625        0.000000
         Y        1820.652187        0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    CORTO)       206.086953          0.000000
    MEDIO)         0.000000         -0.543478
    DIVID)         0.000000         -2.309783
 NO. ITERATIONS=        1
```

A partir del "output" podemos concluir que la cantidad mínima a invertir será de 3.179,35 €., repartidos de la siguiente forma: 1.358,70 € en acciones de la compañía eléctrica y 1.820,65 € en acciones de la compañía de seguros.

Ejemplo: Una empresa productora de piensos compuestos para animales necesita determinar las cantidades de cada componente que debe comprar a fin de cumplir unos requisitos nutricionales a la vez que minimiza los costes totales de la compra. El compuesto puede fabricarse a partir de tres tipos de granos, cada uno de los cuales con la siguiente composición de ingredientes por kilo:

	TIPO DE GRANO		
INGREDIENTES	**X**	**Y**	**Z**
A	3	2	4
B	2	3	1
C	1	0	2
D	6	8	4

El coste (en euros) por kilo de los granos X, Y, y Z es, respectivamente, de 2€, 4€, y 2.5€. La cantidad mínima requerida por animal y mes es de 4 kg. de ingrediente A, 5 kg. de ingrediente B, 1 kg. de ingrediente C, y 8 kg. de ingrediente D. Además, la cantidad mensual de grano de tipo Z que la empresa puede adquirir de su proveedor está limitada a 500 kg. Dado que el pienso producido sirve para alimentar una media de 100 animales al mes, la restricción anterior significa que no podemos contar con más de 5 kg. de grano de tipo Z por cada animal y mes. Plantear y resolver el problema.

Definimos: X = "kg. a comprar de grano X por cada animal y mes", y análogamente Y, y Z.

```
MIN  2X + 4Y + 2.5Z

ST
ingrA)     3X + 2Y + 4Z >= 4
ingrB)     2X + 3Y +  Z >= 5
ingrC)      X +      2Z >= 1
ingrD)     6X + 8Y + 4Z >= 8
limitz)              Z <= 5

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       3
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      5.000000
  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
         X          2.500000          0.000000
         Y          0.000000          1.000000
         Z          0.000000          1.500000
       ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
    INGRA)          3.500000          0.000000
    INGRB)          0.000000         -1.000000
    INGRC)          1.500000          0.000000
    INGRD)          7.000000          0.000000
   LIMITZ)          5.000000          0.000000
 NO. ITERATIONS=        3
```

Adquiriremos sólo 2.5 kg. de tipo X por cada animal y mes, con lo que el coste por animal y mes será de 5 €.

Ejemplo: Mollet Electronics S.A. fabrica cuatro líneas de productos de alta tecnología, los cuales son utilizados en la industria aerospacial. Cada producto debe pasar por diferentes departamentos durante su elaboración. En las tablas siguientes se da información sobre: (a) el tiempo (en horas) que una unidad de cada clase ha de permanecer en cada uno de los departamentos y los beneficios que dicha unidad reporta, y (b) la capacidad productiva disponible por departamento y mes, así como las cantidades mínimas a producir. Utilizando dicha información, determina los niveles de producción mensual.

Producto	Cableado	Torno	Ensamblaje	Inspección	Beneficio por unidad		Departamento	Capacidad (horas)		Producto	Producción Mínima
XJ201	0.5	3	2	0.5	9 €		Cableado	15.000		XJ201	150
XM897	1.5	1	4	1	12 €		Torno	17.000		XM897	100
TR29	1.5	2	1	0.5	15 €		Ensamblaje	26.000		TR29	300
BR788	1	3	2	0.5	11 €		Inspección	12.000		BR788	400

```
MAX  9XJ + 12XM + 15TR + 11BR

ST

0.5XJ + 1.5XM + 1.5TR +     BR <= 15000
3   XJ +     XM + 2  TR + 3  BR <= 17000
2   XJ + 4  XM +     TR + 2  BR <= 26000
0.5XJ +     XM + 0.5TR + 0.5BR <= 12000

    XJ >= 150
    XM >= 100
    TR >= 300
    BR >= 400

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       5
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)       138950.0
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        XJ       150.000000          0.000000
        XM      4016.666748          0.000000
        TR      5666.666504          0.000000
        BR       400.000000          0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
                   0.000000          6.000000
                   0.000000          3.000000
                3166.666748          0.000000
                4875.000000          0.000000
                   0.000000         -3.000000
                3916.666748          0.000000
                5366.666504          0.000000
                   0.000000         -4.000000
 NO. ITERATIONS=       5
```

Ejemplo: La empresa Bicicletas Castalla S.A., ofrece a sus clientes uno de los productos más de moda en lo referente a juguetes para niños: las nuevas bicicletas ergonómicas de cuadro de aluminio y diseño futurista, en versiones para chico y para chica. La compañía sabe que podrá vender todas las bicicletas que sea capaz de fabricar a 220 € las de chico y a 175 € las de chica.

Los contables de la empresa han calculado que los costes de mano de obra suponen el 45% del precio de venta en las de chico, y el 40% del precio de venta en las de chica. Los demás costes de producción, excluyendo la pintura y el empaquetado, ascienden a 44 € por cada bicicleta de chico y 30 € por cada bicicleta de chica. Finalmente, los costes de pintura y empaquetado son de 20 € por bicicleta, sea de chico o de chica.

La capacidad productiva de la planta es de 390 bicicletas por día. Cada bicicleta de chico necesita de 2.5 horas de mano de obra, por 2.4 horas cada una de chica. En la actualidad, Bicicletas Castalla tiene una plantilla de 120 trabajadores, cada uno de ellos con una jornada laboral de 8 horas diarias. La empresa no tiene intención de variar su plantilla, dado que sigue una política basada en la estabilidad de la misma.

Determinar la producción óptima (que maximice beneficios) de cada uno de los modelos de bicicletas.

Sean: X = "nº bicicletas de chico a producir", e
Y = "nº bicicletas de chica a producir"

Ingresos = 220 X + 175 Y

Costes = 0.45*220 X + 0.40*175 Y + 44 X + 30 Y + 20 (X+Y) = 163 X + 120 Y

Beneficios = Ingresos – Costes = 57 X + 55 Y

```
MAX             57X + 55Y

ST

     X +     Y <= 390
 2.5X + 2.4Y <= 960

END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)       21930.00
  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
         X       240.000000          0.000000
         Y       150.000000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          7.000000
        3)         0.000000         20.000000

 NO. ITERATIONS=        2
```

Así pues, lo óptimo será producir 240 bicicletas de chico y 150 de chica, con lo que se lograrán unos beneficios de 21.930 €.

Ejemplo: Forjados S.A. ha suscrito un contrato para suministrar chasis de acero para automóviles que serán fabricados en una nueva planta de producción cercana. La política de calidad total que se está implantando en dicha planta exige que la composición de cada chasis siga las siguientes especificaciones:

MATERIAL	% MÍNIMO	% MÁXIMO
Manganeso	2.1	4.5
Silicio	4.3	4.6
Carbón	2.55	5.35

Forjados S.A. mezcla ocho materiales para producir una tonelada de acero destinado a chasis:

Material disponible	Manganeso (%)	Silicio (%)	Carbón (%)	Kilos disponibles	Coste por kilo
A1	70	15	3	Sin límite	1.2 €
A2	55	30	1	300	1.3 €
A3	12	26	0	Sin límite	1.5 €
I1	1	10	3	Sin límite	0.9 €
I2	5	2.5	0	Sin límite	0.7 €
C1	0	24	18	50	1.0 €
C2	0	25	20	200	1.2 €
C3	0	23	25	200	0.9 €

Determinar qué cantidad de cada material debería usarse para producir una tonelada de acero, de forma que se cumplan los requisitos de calidad y, simultáneamente, se minimicen los costes.

```
MIN        1.2A1 + 1.3A2 + 1.5A3 + 0.9I1 + 0.7I2 + 1.0C1 + 1.2C2 + 0.9C3
ST
           A1 + A2 + A3 + I1 + I2 + C1 + C2 + C3 = 1000
           0.70A1 + 0.55A2 + 0.12A3 +0.01I1 + 0.05I2 >= 21
           0.70A1 + 0.55A2 + 0.12A3 +0.01I1 + 0.05I2 <= 45
           0.15A1 + 0.30A2 + 0.26A3 +0.10I1 + 0.025I2 + 0.24C1 + 0.25C2 + 0.23C3 >= 43
           0.15A1 + 0.30A2 + 0.26A3 +0.10I1 + 0.025I2 + 0.24C1 + 0.25C2 + 0.23C3 <= 46
           0.03A1 + 0.01A2 + 0.03I1 + 0.18C1 + 0.20C2 + 0.25C3 >= 25.5
           0.03A1 + 0.01A2 + 0.03I1 + 0.18C1 + 0.20C2 + 0.25C3 <= 53.5

           A2 <= 300
           C1 <= 50
           C2 <= 200
           C3 <= 200
END
```

```
        LP OPTIMUM FOUND AT STEP      6

                OBJECTIVE FUNCTION VALUE
                1)      720.4000
          VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
                A1         0.000000          0.476000
                A2         0.000000          0.592000
                A3         0.000000          0.800000
                I1         0.000000          0.176000
                I2       898.000000          0.000000
                C1         0.000000          0.156000
                C2         0.000000          0.340000
                C3       102.000000          0.000000
               ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
                2)         0.000000         -0.700000
                3)        23.900000          0.000000
                4)         0.100000          0.000000
                5)         2.910000          0.000000
                6)         0.090000          0.000000
                7)         0.000000         -0.800000
                8)        28.000000          0.000000
                9)       300.000000          0.000000
               10)        50.000000          0.000000
               11)       200.000000          0.000000
               12)        98.000000          0.000000
         NO. ITERATIONS=       6
```

Uso de Lindo versus uso de Excel

En la resolución de los programas anteriores se ha hecho uso principalmente del programa LINDO. En este sentido el empleo de un programa u otro para la resolución de un programa lineal depende de lo que el usuario quiera obtener con los resultados del problema. Si comparamos las ventajas e inconvenientes de ambos programas, podemos establecer lo siguiente:

- **Ventajas de LINDO frente a EXCEL**

  LINDO presenta dos ventajas fundamentales frente a EXCEL:

  1. El planteamiento del programa lineal en LINDO -en cuanto a su introducción en el paquete informático-, es exactamente igual a como se escribe originalmente en una hoja de papel.

2. El usuario posee un control muy sencillo de las variantes del programa lineal que se quieran hacer (análisis de sensibilidad, dualidad, restricciones de integridad).

Estos fueron los grandes motivos de su popularidad a finales de los ochenta y principios de los noventa. Al fin y al cabo, ésos eran los objetivos que buscaba su constructor Linus Schrage en 1985 cuando se diseña la primera versión de LINDO. Inicialmente, estaba presentada en formato DOS para PC. Posteriormente, ya en los años noventa se publica su versión bajo Windows, tal y como se la conoce ahora.

- **Ventajas de EXCEL frente a LINDO**

El empleo de EXCEL presenta ventajas frente a LINDO que se explicitarán a continuación:

a) EXCEL es un programa contenido en el paquete informático Microsoft Office de amplia difusión comercial en universidades y empresas. Por esta razón, no es necesario hacer una inversión específica para la resolución de este programa. Habitualmente se dispone de él porque su uso es sobradamente conocido. En este sentido, LINDO ha de adquirirse exclusivamente para optimizar programas lineales. Además, muchos usuarios conocen perfectamente EXCEL y no es necesario un entrenamiento específico para su empleo en la optimización de programas lineales.

b) Aunque la introducción de los datos de un programa lineal en Excel es, inicialmente, más costosa que en LINDO, la rapidez de los cálculos y la facilidad de comprensión de la ventana de informes finales pueden compensar esa dificultad inicial.

c) EXCEL permite la construcción de *complementos* o *add-ins*, que potencian la fuerza resolutoria del programa. Estos complementos permiten diseñar operaciones de cálculo que originariamente no estaban pensadas para EXCEL. De este modo, el Solver de EXCEL es un complemento que permite resolver programas lineales (normalmente, Solver no aparece con una instalación típica del EXCEL, sino que es necesario una instalación personalizada).

Programación Lineal Entera (PLE) con Lindo y Excel

En muchas situaciones de la vida real, debido a la indivisibilidad de la mayoría de los productos, no será suficiente con obtener como solución a un problema de PL valores decimales. Así, por ejemplo, no tiene mucho sentido que la solución a nuestro problema de maximizar beneficios sea fabricar 20,3 lámparas de tipo I y 13,8 lámparas de tipo II, ni que la forma de minimizar los costes de transporte sea haciendo 5,4 viajes con el camión A y 3,2 con el B. En tales situaciones deberemos incluir en el planteamiento la restricción adicional de que todas las variables han de ser valores enteros, por lo que estaremos ante un problema de Programación Lineal Entera (PLE).

Una primera aproximación a la solución de un problema PLE podría obtenerse resolviendo el problema PL asociado (es decir, olvidándose de la restricción sobre la no divisibilidad de las variables). De hecho, si la solución del PL resulta ser entera, entonces ésta será también la solución del PLE. Si alguna de las variables de la solución no es entera, podríamos pensar en redondear el valor obtenido por el entero más próximo (y que esté en la región factible). Este procedimiento puede ser relativamente bueno cuando los valores redondeados son muy grandes, pero resulta muy peligroso si estos valores son pequeños (en tal caso, es muy probable que la solución del PLE sea muy diferente a la que se obtiene redondeando los valores del PL).

Los procedimientos teóricos que se emplean en la resolución de estos problemas de PLE son básicamente dos: el método **Branch&Bound**, y el de **Planos de Corte de Gomory**. Desde el punto de vista computacional, tanto el LINDO como la hoja de cálculo Excel facilitan sobremanera la resolución de un PLE: tan sólo es necesario indicarle al programa qué variables han de tomar valores enteros. Veamos un ejemplo con LINDO:

```
MAX      11 X + 10 Y
ST
      2X +  Y < 12
       X - 3Y > 1
END
GIN X
GIN Y
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
OBJECTIVE VALUE =   72.4285736

NEW INTEGER SOLUTION OF    66.0000000   AT BRANCH 0   PIVOT 7
BOUND ON OPTIMUM:  66.00000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=       7

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)       66.00000

   VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
          X        6.000000         -11.000000
          Y        0.000000         -10.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.000000
        3)         5.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=        7
BRANCHES=     0 DETERM.=  1.000E    0
```

Aquí le hemos indicado al programa que ambas variables eran enteras mediante el comando **GIN**, y LINDO nos ha devuelto en el output la solución entera X = 6, Y = 0, con la que el valor de la función objetivo es de 66. Podemos ver la diferencia entre este problema PLE y su asociado PL en el siguiente output:

```
MAX      11 X + 10 Y
ST
       2X +  Y < 12
        X - 3Y > 1
END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)       72.42857

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X        5.285714          0.000000
         Y        1.428571          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          6.142857
        3)         0.000000         -1.285714

 NO. ITERATIONS=       2
```

Observamos que la solución del PL es X = 5,286 e Y = 1,429 (solución que no tendrá sentido si X e Y representan objetos indivisibles), con la cual se obtiene un valor para la función objetivo de 72,429. Notar, finalmente, que si redondeásemos estos valores, tomaríamos como solución X = 5 e Y = 1, con lo que nuestra función objetivo valdría 65, i.e.: la “solución de redondeo” nos da un valor peor que el logrado usando PLE (esto en el supuesto de que esta solución sea factible). En este ejemplo puede parecer que la diferencia es poca, pero basta con imaginar el caso extremo de que cada unidad supusiese 1 millón de € para darse cuenta de las grandes pérdidas que este “redondeo” causaría a nuestra empresa.

En ocasiones, puede ocurrir que la variable no sólo tenga que ser entera, sino que además deba ser binaria (i.e., únicamente pueda tomar los valores 0 ó 1). Estaremos pues ante un problema de **PLE Binaria**.

Este tipo de variables es típico de las situaciones "todo o nada", como por ejemplo el tener que decidir si construir o no una nueva factoría, o comprar o no un lote grande de algún recurso para obtener descuentos (deberemos tener en cuenta el coste de mantener el recurso en *stock*).

LINDO ofrece la posibilidad de indicar que una variable es binaria mediante el comando **INT**. Veamos un ejemplo:

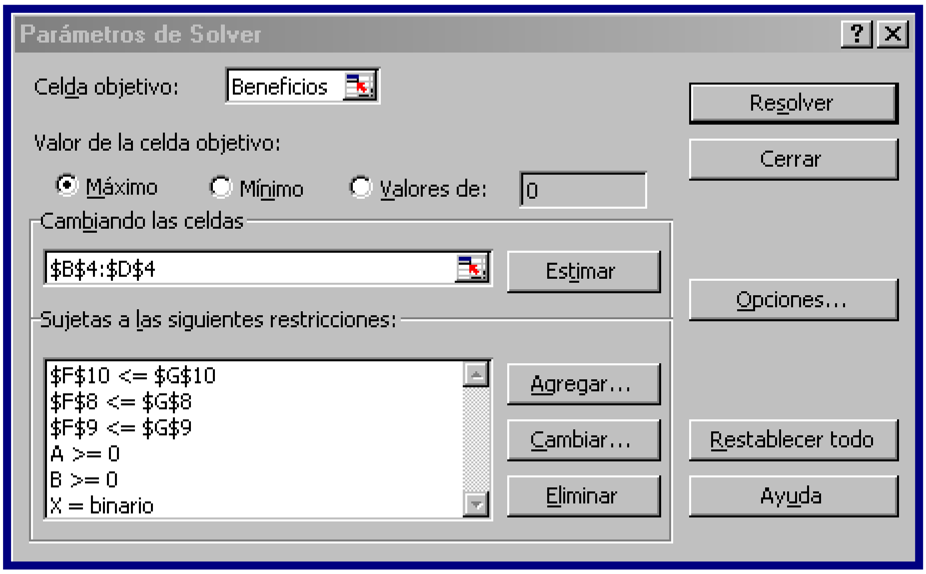
```
MAX -100X + 20A + 12B
ST
      A - 10X     < 0
      A +       B < 11
                B < 7
END
INT X
```

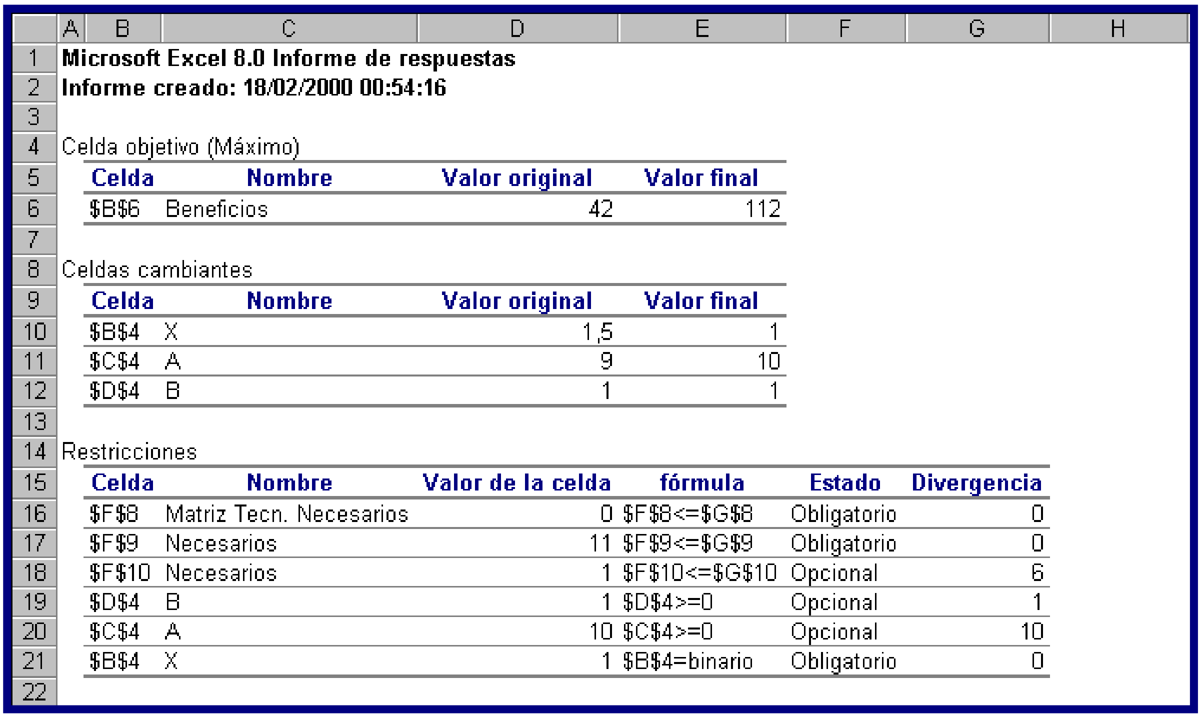
```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
 OBJECTIVE VALUE =    124.000000

 SET  X TO >=  1 AT  1, BND= 112.0   TWIN=  84.00     7

 NEW INTEGER SOLUTION OF  112.000000   AT BRANCH  1 PIVOT  7
 BOUND ON OPTIMUM:  112.0000
 DELETE        X AT LEVEL    1
 ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=    1 PIVOTS=      7

 LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
 RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      112.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X         1.000000         20.000000
         A        10.000000          0.000000
         B         1.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          8.000000
        3)         0.000000         12.000000
        4)         6.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       9
        BRANCHES=    1 DETERM.=  1.000E    0
```

De no haber exigido que la variable X fuese binaria, hubiésemos obtenido como solución los valores X = 0,4 , A = 4 , y B = 7 , con una función objetivo de 124. Si ahora redondeásemos el valor obtenido para X en esta solución, tomaríamos X = 0, con lo que nuestra función objetivo sería de 84. Por supuesto, la solución que hemos obtenido usando INT es mejor, pues nos da un valor para la función objetivo de 112.

El lado negativo de este comando es que si se utiliza con muchas variables en un problema muy extenso aumentará el tiempo de computación necesario para obtener la solución del programa.

Resolver un problema con variables enteras o binarias usando Excel es tan sencillo como añadir las correspondientes restricciones en la macro de Solver. Conviene tener cuidado con la notación de ambos programas, pues para las variables enteras LINDO usa el comando **GIN** y Solver la expresión **int**, mientras que para las variables binarias LINDO usa el comando **INT** y Solver las letras **bin**. A continuación se muestran las ventanas correspondientes al ejemplo binario anterior:





Microsoft Excel 8.0 Informe de respuestas
Informe creado: 18/02/2000 00:54:16

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$6	Beneficios	42	112

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$4	X	1,5	1
$C$4	A	9	10
$D$4	B	1	1

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$F$8	Matriz Tecn. Necesarios	0	$F$8<=$G$8	Obligatorio	0
$F$9	Necesarios	11	$F$9<=$G$9	Obligatorio	0
$F$10	Necesarios	1	$F$10<=$G$10	Opcional	6
$D$4	B	1	$D$4>=0	Opcional	1
$C$4	A	10	$C$4>=0	Opcional	10
$B$4	X	1	$B$4=binario	Obligatorio	0

BIBLIOGRAFÍA

[1] Anderson, D.R., Sweeney, D. J. y Williams, T.A. (1999): *Contemporary Management Science with Spreadsheets.* International Thomson Publishing Company.

[2] Camm, J. y Evans, J.R. (2000): *Management Science and Decision Technology*. South Western College Publishing.

[3] Eppen, G.D., Gould, F.J., Schmidt, C.P., Moore,J.H., Weatherford, L.R. (1998): *Introductory Management Science. Decision Modeling with Spreadsheets*. Prentice Hall.

[4] Hillier, F.S., Hillier, M.S. y Liebermann, G.J. (2000): *Introduction to Management Science. A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*. Irwin-McGraw-Hill.

[5] Lawrence, A.L. y Pasternack, B.A. (1998): *Applied Management Science. A Computer Integrated Approach for Decision Making*. Ed. Wiley.

[6] Winston, W. y Albright, S. C. (1997): *Practical Management Science. Spreadsheet Modeling and Applications*. Duxbury Press.

ENLACES

- http://www.lindo.com
  Página web del software LINDO.
- http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/90-XX.html
  Web con recursos sobre programación lineal.
- http://www.personal.psu.edu/faculty/t/m/tmc7/tmclinks.html
  Web con recursos sobre programación lineal.
- http://www.opsmanagement.com/
  Web de OPSMANAGEMENT.COM (recursos sobre dirección de operaciones).
- http://www.rpi.edu/~mitchj/sites_or.html
  Enlaces a webs sobre investigación operativa.
- http://lionhrtpub.com/ORMS.html
  ORMS Journal.
- http://www.pitt.edu/~jrclass/or/or-intro.doc
  Artículo introductorio a la Investigación Operativa y sus aplicaciones.
- http://www.kem.ae.poznan.pl/Books/Excel-Solver/T1/T1.htm
  Tutorial sobre optimización con Excel-Solver.
- http://www.faqs.org/faqs/linear-programming-faq/
  Web dedicada a preguntas más comunes acerca de Programación Lineal.
- http://carbon.cudenver.edu/~hgreenbe/courseware/LPshort/intro.html
  Se trata de un curso breve de Programación Lineal.