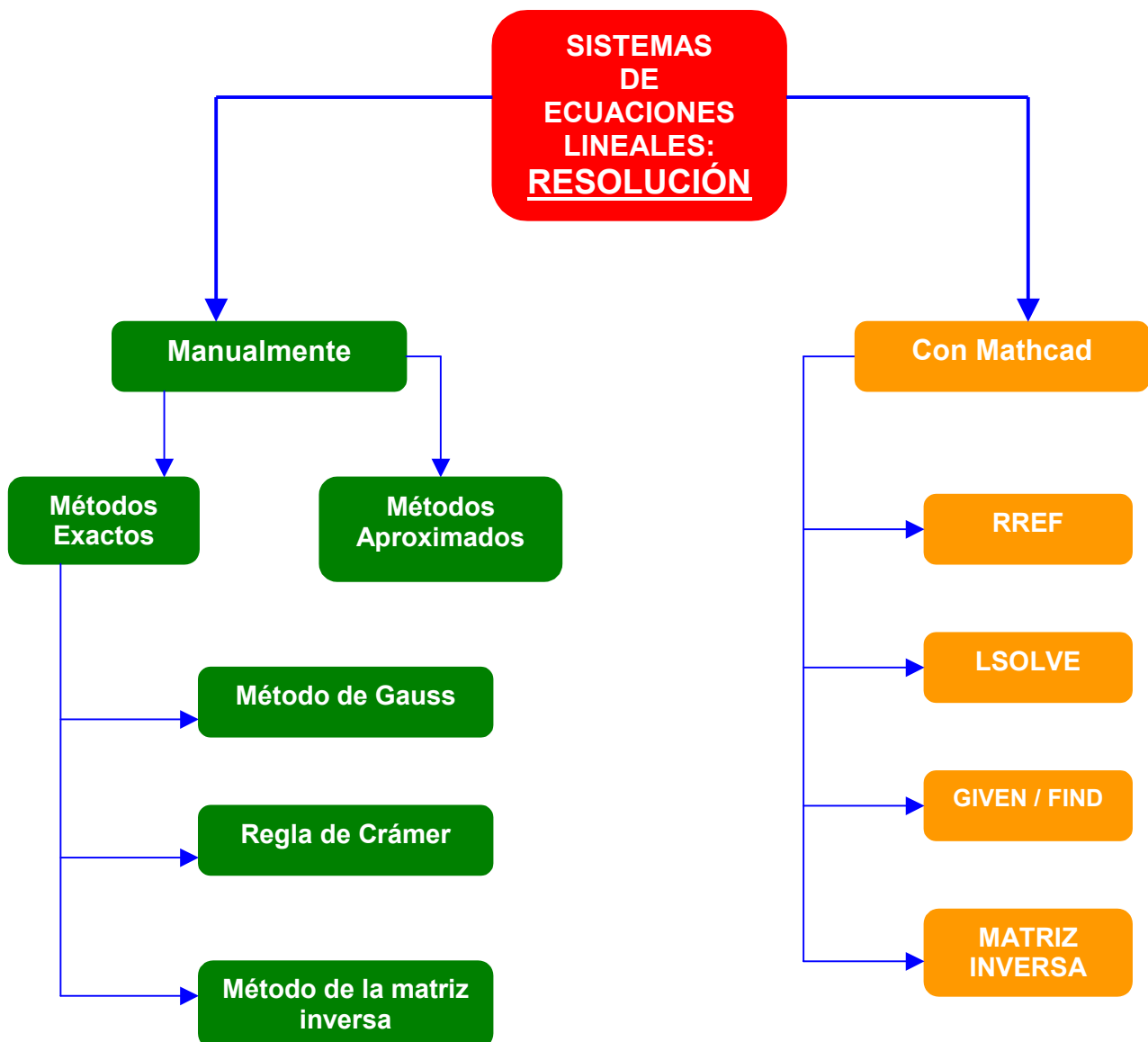


SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: RESOLUCIÓN

Autores: Cristina Steegmann Pascual (csteegmann@uoc.edu), Juan Alberto Rodríguez Velázquez (jrodriguezvel@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Muchos problemas técnicos y científicos requieren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Se trata, pues, de un tema fundamental para todas las disciplinas que utilizan las matemáticas de una manera u otra. En muchos problemas existe dependencia entre las diferentes magnitudes o variables que intervienen y a menudo se plantea en forma de ecuación lineal.

Dentro del proceso de resolución de problemas con SEL, se pueden definir seis etapas:

1. Leer el problema.
2. Definir las incógnitas principales de forma precisa.
3. Traducción matemática del problema hasta plantear un SEL.
4. Resolución del SEL.
5. Interpretación de las soluciones.
6. Contrastar la adecuación de las soluciones obtenidas.

El "fracaso" en la resolución de un SEL puede ser debido a la presencia de dificultades en una o varias de las etapas anteriores. Por ello, es fundamental realizar, previamente, un buen análisis del SEL así como seguir con rigurosidad el método utilizado para su resolución.

De estudios anteriores ya son conocidos los sistemas de ecuaciones lineales y no nos son extraños algunos términos relacionados con su resolución (como los conocidos métodos de sustitución, igualación y reducción). No obstante tampoco nos son desconocidas las dificultades del análisis y el cálculo en la resolución de los sistemas de más de tres ecuaciones con tres incógnitas.

En este *math-block* se presentan diferentes técnicas y algoritmos utilizados en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales tanto de forma manual como con ayuda del software.

OBJETIVOS

- Resolver los SEL por el método de Gauss.
- Resolver los SEL por el método de la matriz inversa.
- Resolver los SEL por la regla de Crámer.
- Mostrar las posibilidades que brinda el programa Mathcad para resolver los SEL.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es recomendable haber leído, previamente, los *math-blocks* relativos a:

- Álgebra de matrices.
- Determinantes.
- Matriz inversa.
- Discusión de SEL.
- Además, recomendamos los introductorios a Mathcad.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

□ Preliminares [W2, W3]

Un sistema de ecuaciones lineales (SEL) es un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde a_{ij} son los coeficientes, x_i las incógnitas, y b_i los términos independientes.

El anterior sistema se puede expresar en forma matricial, usando el producto de matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

De modo simplificado suele escribirse $A_{m,n} \cdot X_{n,1} = B_{m,1}$, donde:

- la matriz A , de orden $m \times n$, se llama matriz de los coeficientes
- la matriz X , de orden $n \times 1$, se llama matriz de las incógnitas
- la matriz B , de orden $m \times 1$, se llama matriz de los términos independientes.

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se pueden dividir en dos grandes grupos:

- Los **métodos exactos** o **directos**, que permiten obtener la solución del sistema de manera directa. Éstos proporcionan una solución exacta en un número finito de operaciones. Son válidos, aproximadamente, para valores de n menores que 5000 ya que si n es muy grande, la acumulación de los errores de redondeo puede llegar a provocar que la solución numérica no sea exactamente igual que la solución exacta.
- Los **métodos aproximados** o **iterativos**, que utilizan algoritmos iterativos e infinitos y que calculan las soluciones del sistema por aproximaciones sucesivas. Para ello, construyen una sucesión de vectores destinada a converger a la solución del sistema.

Al contrario de lo que pueda parecer, en muchas ocasiones los métodos aproximados permiten obtener un grado de exactitud superior al que se puede obtener empleando los denominados métodos exactos, debido fundamentalmente a los errores de truncamiento que se producen en el proceso.

De entre los métodos exactos, a continuación se analizan el método de Gauss, la regla de Crámer y el de la matriz inversa para resolver un SEL, así como las funciones GIVEN/FIND, LSOLVE y RREF del mathcad. Entre los métodos aproximados está el método iterativo que se realiza con la ayuda del software (se profundiza en el estudio de éste en el *math-block* "Modelos matemáticos"). Particularmente, este *math-block* se centra en la resolución de sistemas con una única solución; es decir, con $m=n$, se muestra cómo hallar un vector X , n -dimensional, que sea solución del sistema $A \cdot X = B$

□ **Método de Gauss [W4, W5, W7]**

Este método no es más que la generalización del método de reducción ya conocido para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y se basa en el concepto de equivalencia.

Decimos que dos sistemas $Ax = b$ y $A'x = b'$ son equivalentes si tienen la misma solución. Si sobre un sistema de la forma $Ax = b$ se realizan una serie de operaciones como:

1. multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
2. sumar un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.
3. intercambiar ecuaciones.

el sistema resultante, $A'x = b'$, es equivalente al primero.

El método de Gauss consiste en, a partir de un sistema $Ax = b$, conseguir otro sistema $A'x = b'$ equivalente tal que A' sea una matriz triangular superior. De esta forma, el sistema de ecuaciones se puede resolver fácilmente.

La idea general es hacer cero todos los elementos que se encuentren debajo de la diagonal principal. Por ejemplo, en una matriz de 3×3 , hacer nulos los elementos a_{21} , a_{31} y a_{32} .

Se trata, pues, de, utilizando las transformaciones de equivalencia, lograr que algunos de los coeficientes de las incógnitas sean nulos.

El procedimiento es:

1. Se elige una incógnita con coeficiente no nulo al que llamaremos pivote y que, por comodidad, supondremos que es el a_{11} (si no es éste, siempre se puede alterar el orden de los términos en todas las ecuaciones, o permutar ecuaciones, para situar el pivote en el lugar inicial).

2. A la segunda ecuación se le suma la primera multiplicada por $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, a la tercera le sumamos la

primera multiplicada por $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ y así sucesivamente hasta llegar a la última en la que se sumará

la primera multiplicada por $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$. Con ello el sistema quedará así:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Este sistema es equivalente al primero

3. Si se separa la primera ecuación se obtiene otro sistema con una ecuación y una incógnita menos en el que se repite el proceso tomando como pivote el coeficiente a'_{22} (si a'_{22} es cero no se puede tomar como pivote y se selecciona otro como explicamos antes)
4. Se repite el proceso hasta obtener una sola ecuación o un sistema con todos los coeficientes nulos. De este modo, si agregamos las ecuaciones suprimidas, obtenemos un sistema en forma escalonada.

En la práctica es más cómodo abreviar la escritura del sistema escribiendo sólo los coeficientes y los términos independientes en forma de matriz numérica recordando qué columna corresponde a cada incógnita (por si ha sido preciso cambiar alguna columna de lugar). Es decir,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Ejemplo: Resolver, utilizando el método de Gauss, el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + 3y - 2t = -1 \\ 2x + 6y + z + t = -12 \\ 3x - y + z - t = 7 \\ 2x + y + z + t = -2 \end{cases}$$

La matriz del sistema es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & -12 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

sobre la que aplicaremos el método de Gauss.

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & -12 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \\ \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{(6)} \\
 \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(7)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Pasos seguidos:

- (1) Tomamos como pivote el elemento $a_{11}=1 \neq 0$. Reducimos a cero los elementos de la 1ª columna que se encuentran debajo del pivote. Para ello hacemos:
 - 2ª fila = 2ª fila - 2 · 1ª fila
 - 3ª fila = 3ª fila - 3 · 1ª fila
 - 4ª fila = 4ª fila - 2 · 1ª fila
- (2) Como $a_{22} = 0$, intercambiamos entre ellas la 2ª y la 4ª fila.
- (3) Cambiamos el signo de la 2ª fila multiplicando ésta por (-1).
- (4) Tomamos como nuevo pivote el elemento $a_{22} = 5 \neq 0$. Reducimos a cero los elementos que están por debajo de éste. Para ello hacemos:
 - 3ª fila = 3ª fila + 2 · 2ª fila
- (5) Cambiamos el signo de la 3ª fila multiplicando ésta por (-1).
- (6) Tomamos como nuevo pivote el elemento $a_{33} = 1 \neq 0$. Reducimos a cero los elementos que están por debajo de éste, del siguiente modo:
 - 4ª fila = 4ª fila - 3ª fila
- (7) Eliminamos la 4ª fila, esto es, la última ecuación.

La matriz final que hemos obtenido tiene una fila menos que el número de incógnitas; por lo tanto, tenemos un grado de libertad para elegir la t , que puede tomar cualquier valor ya que la cuarta ecuación, que es la que queda con esta variable, es $0 \cdot t = 0$, que se cumple para cualquier valor real de t .

Y sustituyendo hacia atrás en las otras ecuaciones obtenemos la solución general del sistema, la cual depende de un parámetro arbitrario t , y es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 z &= -10 - 5t \\
 y &= \frac{z + 5t}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \\
 x &= -3y + 2t - 1
 \end{aligned}$$

Si ponemos la solución en función de un parámetro, λ , resulta:

$$\begin{cases} x = 2\lambda + 5 \\ y = -2 \\ z = -10 - 5\lambda \\ t = \lambda \end{cases}$$

□ Regla de Crámer [W6]

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de Crámer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo.

Los sistemas de Crámer son siempre compatibles y determinados.

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales puede efectuarse mediante la llamada regla de Crámer que afirma:

"En un sistema de Crámer, cada incógnita puede obtenerse mediante el cociente de dos determinantes. El numerador es el determinante de la matriz de los coeficientes en el que se ha sustituido la columna correspondiente a la incógnita a despejar por la columna de los términos independientes y el denominador es el determinante de la matriz de los coeficientes".

En efecto: Sea el sistema de Crámer siguiente, de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

que escrito matricialmente quedaría así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces, la solución del sistema será:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

⋮

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

donde $|A|$ es el determinante de la matriz de coeficientes.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 10 \\ 4x + 3y + 4z = 21 \\ 2x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

Primero de todo calculemos el valor del determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 8 + 8 - 12 - 12 - 8 = 2 \neq 0$$

Al ser este determinante diferente de cero, podemos asegurar que se trata de un sistema de Crámer. En este caso, las soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 21 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{60 + 36 + 42 - 54 - 40 - 42}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Términos independientes del sistema

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 4 & 21 & 4 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{126 + 80 + 72 - 84 - 108 - 80}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 4 & 3 & 21 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{2} = \frac{81 + 42 + 40 - 60 - 63 - 36}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Observemos que la columna de los términos independientes se sustituye en la columna correspondiente a la incógnita a determinar.

De este modo, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

□ Método de la matriz inversa [W6]

Sabiendo calcular la matriz inversa y multiplicando matrices también es posible resolver un sistema de ecuaciones lineales, siempre y cuando éste sea de Crámer (es decir, tenga igual número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes no sea nulo). Veamos cómo:

Sea el siguiente sistema de Crámer, de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Escrito matricialmente quedaría así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

esto es: $A \cdot X = B$

Si multiplicamos por la matriz inversa de A a la izquierda en ambos miembros de la igualdad, obtenemos:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

Por tanto, por la propiedad asociativa de las matrices:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

Esto es:

$$I \cdot X = A^{-1}B$$

Y por ser la matriz identidad (I) el elemento neutro del producto de matrices, llegamos a que:

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Es decir, la solución del sistema se halla multiplicando la inversa de la matriz de coeficientes por la matriz de términos independientes.

¡Atención! No se debe olvidar que, al no ser conmutativo el producto de matrices, es necesario respetar el orden en que aparecen multiplicadas las matrices.

Ejemplo:

Como ejemplo resolveremos el mismo sistema del apartado anterior y comprobaremos que se obtienen los mismos resultados. El sistema es:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 10 \\ 4x + 3y + 4z = 21 \\ 2x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos su inversa por el método de los adjuntos:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \end{aligned}$$

Entonces,

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}}{2}$$

Por tanto, la matriz X de las incógnitas será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

de donde se concluye que:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Solución ésta que coincide con la encontrada por la regla de Crámer.

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

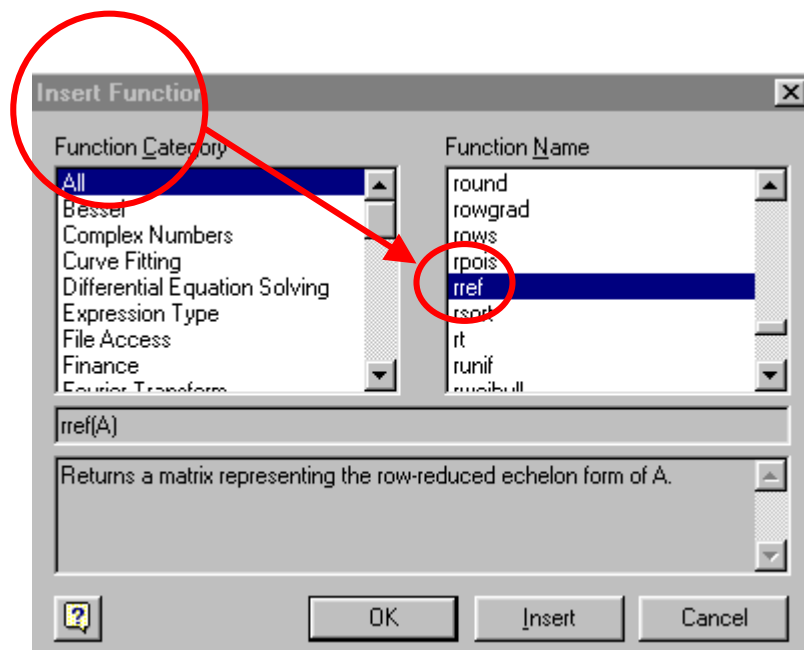
Supongamos que tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}
 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 + 3x_5 - 8x_6 - 5x_7 + 4x_8 + 3x_9 = 22 \\
 2x_1 + x_2 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 - 2x_7 + x_8 - x_9 = -27 \\
 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 - 4x_9 = -8 \\
 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + 5x_6 + 4x_7 - 4x_8 + x_9 = 6 \\
 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 - 3x_7 - 2x_8 + 6x_9 = 1 \\
 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 14x_6 + 6x_7 + 3x_8 + 2x_9 = -20 \\
 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 9x_6 - 7x_7 - 8x_8 + 9x_9 = 45 \\
 6x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 8x_4 + 12x_5 + 7x_6 + 6x_7 + 30x_8 + 4x_9 = -134 \\
 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 8x_8 + 17x_9 = -43
 \end{cases}$$

Aplicar cualquiera de los métodos estudiados hasta ahora para resolver el sistema, como podría ser la regla de Crámer o Gauss, representará una tarea ardua y muy costosa de realizar, especialmente en tiempo y esfuerzo mental. Sin embargo, utilizando el programa Mathcad será bastante sencillo. Veámoslo:

❑ **Método 1 de resolución: RREF [2]**

Utilizando la notación matricial, podemos hallar la solución del sistema utilizando la función **rref**, la cual devuelve una matriz que representa la forma reducida de la matriz dada.



Para ello introducimos la matriz ampliada, i.e., con coeficientes y términos independientes y le aplicamos la función **rref**:

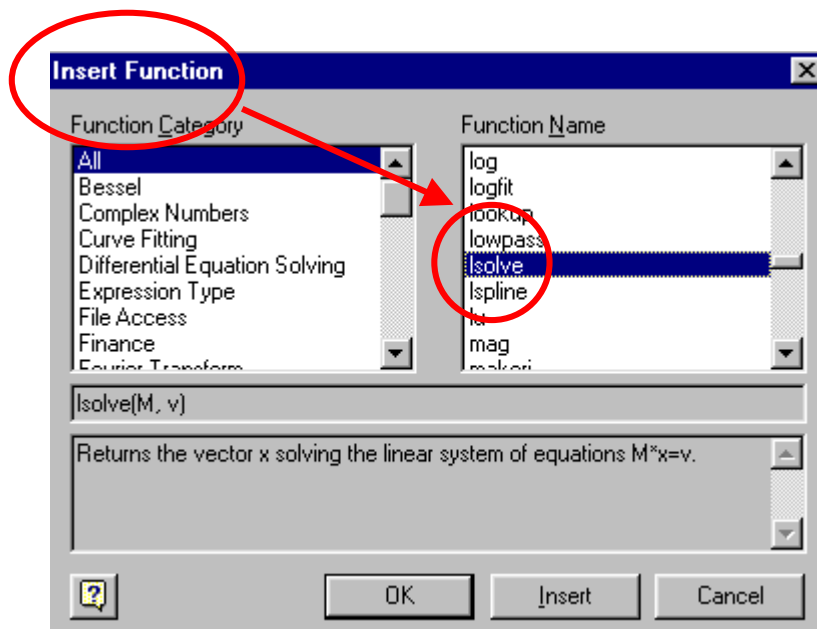
$$\text{ref} \left(\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & -1 & 3 & -8 & -5 & 4 & 3 & 22 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1 & -27 \\ 3 & 3 & 1 & -2 & -1 & -2 & 3 & 5 & -4 & -8 \\ 6 & 2 & 3 & -4 & -3 & 5 & 4 & -4 & 1 & 6 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 1 & -2 & -3 & -2 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 7 & 14 & 6 & 3 & 2 & -20 \\ 8 & -3 & 6 & -7 & 4 & 9 & -7 & -8 & 9 & 45 \\ 6 & -3 & -6 & 8 & 12 & 7 & 6 & 30 & 4 & -134 \\ 6 & -3 & 4 & -8 & 9 & 6 & 4 & 8 & 17 & -43 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Esta función transforma la matriz de coeficientes en la matriz identidad y, por tanto, la columna de términos independientes se convierte en el vector solución del sistema. En consecuencia, la solución al sistema anterior es:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -1 \quad x_5 = 5 \quad x_6 = -2 \quad x_7 = 0 \quad x_8 = -5 \quad x_9 = -4$$

□ **Método 2 de resolución: LSOLVE [3]**

Al igual que en el apartado anterior, aplicaremos la función **lsolve** -que se encuentra en **Insert>Function**.



Para ello, introducimos la matriz de coeficientes del sistema y el vector de términos independientes:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & -1 & 3 & -8 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -2 & -1 & -2 & 3 & 5 & -4 \\ 6 & 2 & 3 & -4 & -3 & 5 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 1 & -2 & -3 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 7 & 14 & 6 & 3 & 2 \\ 8 & -3 & 6 & -7 & 4 & 9 & -7 & -8 & 9 \\ 6 & -3 & -6 & 8 & 12 & 7 & 6 & 30 & 4 \\ 6 & -3 & 4 & -8 & 9 & 6 & 4 & 8 & 17 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 22 \\ -27 \\ -8 \\ 6 \\ 1 \\ -20 \\ 45 \\ -134 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Para obtener el **vector solución** aplicamos la función `lsolve` a A y B:

$$\text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \\ -1.918 \times 10^{-15} \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Debido a los errores de redondeo al ejecutar las operaciones, los valores salen aproximados; de ahí que la solución -1.918×10^{-15} se debe interpretar como 0. Se comprueba que las soluciones del sistema coinciden con las calculadas en el apartado anterior.

□ Método 3 de resolución: GIVEN y FIND [3]

Para este método es necesario asignar, en primer lugar, valores iniciales (cualesquiera) a las variables. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x_1 &:= 1 & x_4 &:= 4 & x_7 &:= 7 \\ x_2 &:= 2 & x_5 &:= 5 & x_8 &:= 8 \\ x_3 &:= 3 & x_6 &:= 6 & x_9 &:= 9 \end{aligned}$$

i.e. se hace una "predicción" de la que podría ser la solución del sistema.

Definimos ahora el sistema, usando la instrucción **Given**. Se escribe la palabra "Given"; así se indica a Mathcad que lo que le sigue a continuación es un sistema de ecuaciones. Se puede escribir "Given" con cualquier tipo de letra, sólo es necesario asegurarse de no escribirla en una región de texto (debe ser en una región matemática)

Given

Se escribe el sistema de ecuaciones, pero **¡Atención!**: Usando el signo "=" que aparece en la barra de herramientas **Boolean**:

$$\begin{aligned}
 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 + 3x_5 - 8x_6 - 5x_7 + 4x_8 + 3x_9 &= 22 \\
 2x_1 + x_2 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 - 2x_7 + x_8 - x_9 &= -27 \\
 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 - 4x_9 &= -8 \\
 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + 5x_6 + 4x_7 - 4x_8 + x_9 &= 6 \\
 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 - 3x_7 - 2x_8 + 6x_9 &= 1 \\
 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 14x_6 + 6x_7 + 3x_8 + 2x_9 &= -20 \\
 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 9x_6 - 7x_7 - 8x_8 + 9x_9 &= 45 \\
 6x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 8x_4 + 12x_5 + 7x_6 + 6x_7 + 30x_8 + 4x_9 &= -134 \\
 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 8x_8 + 17x_9 &= -43
 \end{aligned}$$

The screenshot shows a Microsoft Word document titled "Professional - [given_find]". The document contains a system of linear equations and initial values for variables x_1 through x_9 . Annotations include:

- A green circle around the word "Given" with an arrow pointing to the initial values.
- A green circle around the text "Escribirlo en REGIÓN MATEMÁTICA" with an arrow pointing to the equations.
- A red circle around the "Math" toolbar, with an arrow pointing to the "Equation" icon.
- A red circle around the "Boolean" toolbar, with an arrow pointing to the "=" symbol.
- An orange circle around the "=" symbol in the sixth equation, with an arrow pointing to the "Boolean" toolbar.

The content of the document is as follows:

$x_1 := 1$ $x_4 := 4$ $x_7 := 7$

$x_2 := 2$ $x_5 := 5$ $x_8 := 8$

$x_3 := 3$ $x_6 := 6$ $x_9 := 9$

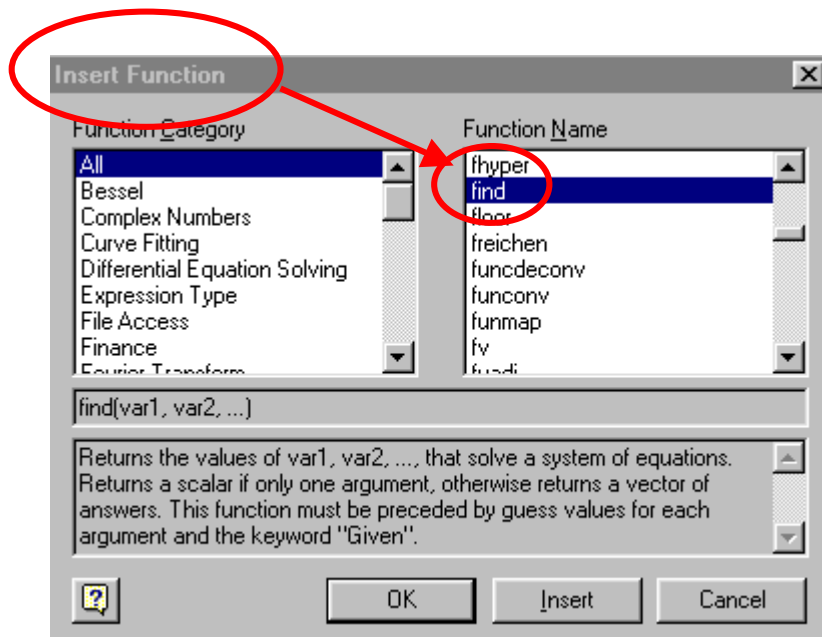
Given

$$\begin{aligned}
 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 + 3x_5 - 8x_6 - 5x_7 + 4x_8 + 3x_9 &= 22 \\
 2x_1 + x_2 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 - 2x_7 + x_8 - x_9 &= -27 \\
 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 - 4x_9 &= -8 \\
 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + 5x_6 + 4x_7 - 4x_8 + x_9 &= 6 \\
 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 - 3x_7 - 2x_8 + 6x_9 &= 1 \\
 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 14x_6 + 6x_7 + 3x_8 + 2x_9 &= -20 \\
 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 9x_6 - 7x_7 - 8x_8 + 9x_9 &= 45
 \end{aligned}$$

Finalmente, usando la función **Find** (se halla en **Insert** ⇒ **Function**):

$$X := \text{Find}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$

aparece la solución del sistema que, efectivamente, es la correcta (coincide con la de los anteriores)



apartados): $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

❑ Método 4 de resolución: MATRIZ INVERSA

También se puede resolver el sistema anterior utilizando la matriz inversa.

Recordemos el sistema del que partíamos:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 + 3x_5 - 8x_6 - 5x_7 + 4x_8 + 3x_9 = 22 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 - 2x_7 + x_8 - x_9 = -27 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 - 4x_9 = -8 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + 5x_6 + 4x_7 - 4x_8 + x_9 = 6 \\ 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 - 3x_7 - 2x_8 + 6x_9 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 14x_6 + 6x_7 + 3x_8 + 2x_9 = -20 \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 9x_6 - 7x_7 - 8x_8 + 9x_9 = 45 \\ 6x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 8x_4 + 12x_5 + 7x_6 + 6x_7 + 30x_8 + 4x_9 = -134 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 8x_8 + 17x_9 = -43 \end{cases}$$

Sea A la matriz de los coeficientes, B la de los términos independientes y X el vector solución. De esta forma el sistema en cuestión es:

$$A \cdot X = B$$

Entonces se puede multiplicar a la izquierda de cada miembro por la inversa de A de manera que queda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Entonces se llega a la conclusión de que $X = A^{-1} \cdot B$, calculo éste que se puede realizar con la ayuda del mathcad (ver *math-block* "Matriz inversa"):

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \\ -2.373 \times 10^{-15} \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, debido a los errores de redondeo al ejecutar las operaciones, los valores salen aproximados ; de ahí que la solución -2.373×10^{-15} se debe interpretar como 0. Se comprueba que las soluciones del sistema coinciden con las halladas en los apartados anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Montes Lozano, A (1998): "Álgebra", Ediciones UOC, Módulo 3: "Matrices, vectores y sistemas de ecuaciones lineales", 55-58

- [2] G. J. Porter, D. R. Hill (1996): "Interactive Linear Algebra. A laboratory course using Mathcad", Springer-Verlag New York, Inc., Chapter 2
- [3] H. Benker (1999): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer-Verlag New York, Inc., 211-218
- [4] J. A. Moreno, D. Ser (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A., 186
- [5] H. Anton (1997): "Introducción al álgebra lineal", Limusa, 21-106
- [6] H. Anton, C. Rorres (2000): "Elementary Linear Algebra: Applications Version", John Wiley&Sons.

ENLACES

- [W1] <http://ist.uwaterloo.ca/ic/mathcad/videos/linalg/03/the.avi>
Fichero AVI con una lección sobre resolución sistemas de ecuaciones lineales con mathcad .
En inglés.
- [W2] <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/sel01.html>
Página web de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. En español.
- [W3] <http://www.uv.e/~diaz/mn/node25.html>
Página web de Wladimiro Díaz Villanueva, del departamento de Informática de la Universitat de València. En español.
- [W4] http://www.dsic.upv.es/~mrebollo/c_aplicado//node2.html
Página web de Miguel Rebollo, del departamento de sistemas informáticos y computación de la Universitat Politècnica de Valencia. En español.
- [W5] <http://www.sectormatematica.cl/contenidos/matsisec.htm>
Página web de "Sector Matemática". En español.
- [W6] <http://usuarios.lycos.es/manuelnando/rouche.html>
Página web de Manuel Nando con "Todo Matemática"; recopilación de apuntes y ejercicios.
En español.
- [W7] <http://usuarios.lycos.es/manuelnando/apuntesgauss.html>
Página web de Manuel Nando con "Todo Matemática"; recopilación de apuntes y ejercicios.
En español.
- [W8] http://www.cesga.es/telecursos/F90/sec5/cap1/Frame_Tema5_Cap1_1.html
Página web del Centro de Supercomputación de Galicia. En gallego y español.