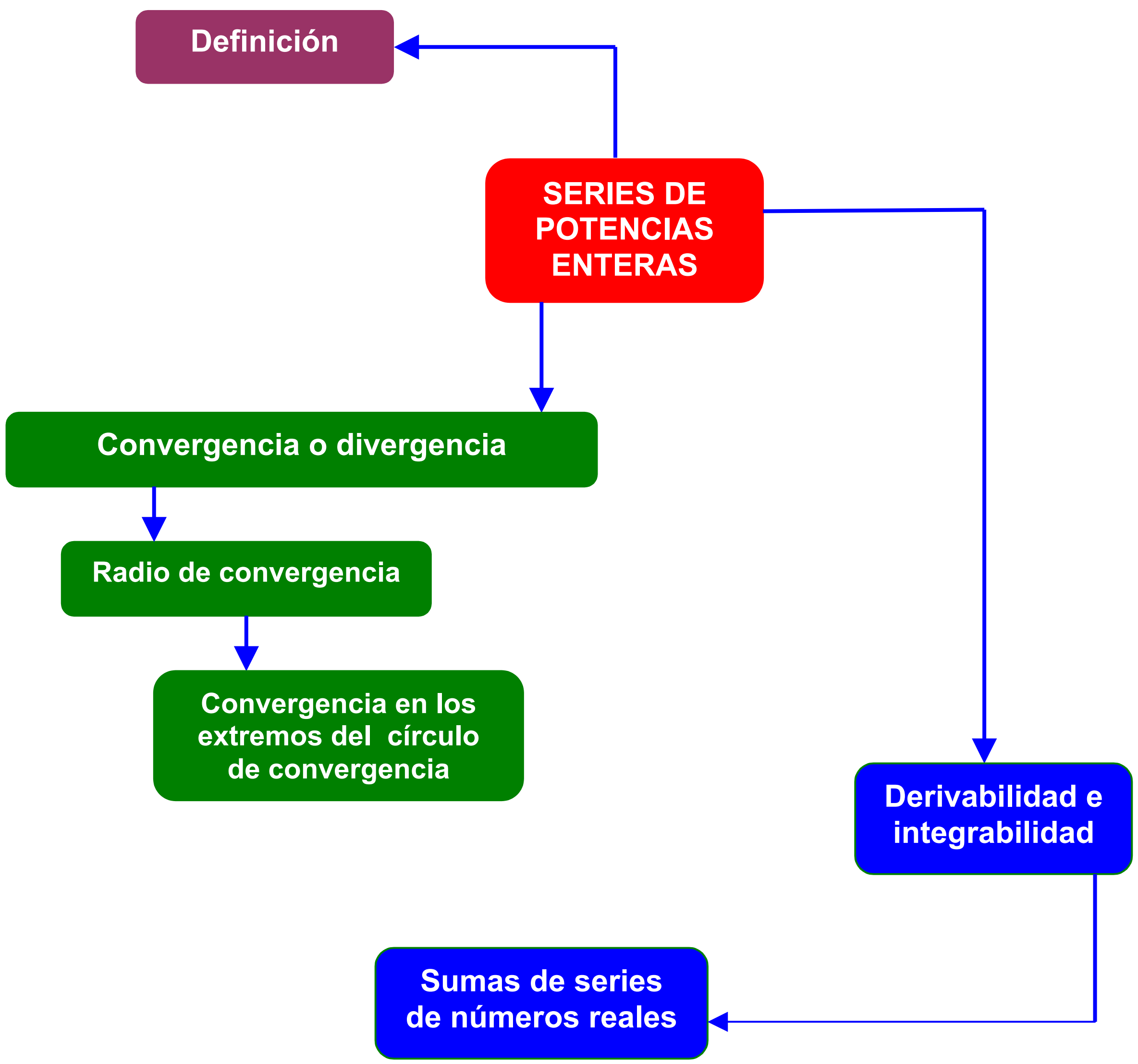
SERIES DE POTENCIAS

Autor: Patrici Molinàs Mata (pmolinas@uoc.edu), José Francisco Martínez Boscá (jmartinezbos@uoc.edu)

MAPA CONCEPTUAL



Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

INTRODUCCIÓN

Hemos visto anteriormente los criterios de convergencia para series de números reales positivos o alternados. Utilizando toda esta riqueza analítica vamos a ocuparnos de investigar el comportamiento de una serie de funciones, en particular, de potencias, cuya convergencia va a depender del valor de la variable *x*. Es así como podremos introducir el concepto de radio de convergencia *R*. Dentro del intervalo *(-R, R)* la serie será convergente, fuera, divergente, y en los puntos de frontera, es decir, en *x*=-*R* e *y*=*R*, deberemos estudiar las series numéricas asociadas a estos dos puntos para determinar la convergencia o divergencia de la serie de potencias en ellos.

Este Mathblock también tiene una parte aplicada. En ella illustramos la utilidad de las series de potencias para el cálculo de la suma de series numéricas. Derivando o integrando una serie de potencias, cuya suma analítica conozcamos, podemos llegar a una expresión que, por substitución de la variable, corresponda a la serie numérica cuya suma buscamos. De esta forma podemos conseguir determinar la suma numérica indirectamente. Estas operaciones de derivación e integración sólo son posibles dentro del radio de convergencia de las serie de potencias. Aquí radica la importancia de determinar con exactitud el radio de convergencia.

OBJETIVOS DOCENTES

- Ser capaz de determinar para que intervalo de la recta real, una serie de potencias es convergente, es decir su suma infinita converge a un valor finito.
- Adquirir las intuiciones necesarias a fin de poder explorar la posibilidad que la suma de una serie numérica pueda calcularse mediante una serie de potencias.
- Dotarse de una cierta destreza en el uso de programa Mathcad para verificar la resolución de problemas de sumación de series numéricas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Previamente a la lectura de este Mathblock es recomendable el haber realizado un estudio detallado de los siguientes temas:

- Sucesiones y series de números reales.
- Derivación e integración.

Asimismo también es muy aconsejable que se tenga un conocimiento mínimo del programa Mathcad.

Por lo tanto, recomendamos que trabajéis los Mathblocks: “Uso básico del Mathcad en Análisis (I): cálculo simbólico y analítico”, “Funciones de una variable”, “Derivación”, “Integración”, “Sucesiones” y “Series de números reales” antes de empezar con éste.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- **Las series de potencias**

Una serie del tipo:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

ordenada por potencias enteras crecientes de la variable x y con coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ constantes, independientes de x, recibe el nombre de serie de potencias.

A menudo consideramos la serie de potencias en una forma más general:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

donde a es otra constante. De hecho, por el Mathboch de “Aplicaciones de las derivadas” sabemos que este tipo de series reciben el nombre de series de MacLaurin y de Taylor, respectivamente. Una serie de Taylor puede ser reducida a una de MacLaurin mediante el siguiente cambio de variable:

$$x - a = x'$$

En lo que concierne a la convergencia de series, trataremos sólo las series de MacLaurin puesto que las de Taylor se reducen a las primeras mediante un simple cambio de variable.

- **Convergencia de una serie de potencias**

Investiguemos la convergencia de una serie de potencias de MacLaurin cualquiera. Asignando un valor numérico particular a la variable x, se obtiene una serie que convergirá o divergirá dependiendo del valor de la x.

Vamos a demostrar que para cualquier serie de potencias existe un número finito o infinito r llamado **radio de convergencia de la serie** tal que si $r > 0$, entonces para $|x| < r$ la serie converge y para $|x| > r$, la serie diverge. Para $|x| = r$, es decir, para $x = r$ y $x = -r$, la serie converge o diverge. El intervalo abierto $]-r, r[$ recibe el nombre de **intervalo o círculo de convergencia** de la serie de potencias considerada. Si $r = \infty$, el intervalo de convergencia es toda la recta real. Por el contrario, si $r = 0$, la serie de potencias converge sólo en el punto $x = 0$ y, hablando rigurosamente, no hay intervalo de convergencia.

En muchos casos podemos determinar el intervalo de convergencia de una serie de potencias con la ayuda del **criterio de convergencia de d’Alembert**. A dicho efecto, construimos —en primer lugar— la serie compuesta por los valores absolutos de los términos de la serie, que será una serie de números reales positivos:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + |a_3||x^3| + \ldots + |a_n||x^n| + \ldots$$

Como mostramos en el Mathblock de "Series de números reales", si la serie que acabamos de escribir converge, entonces la serie original será absolutamente convergente. Llamemos al (n+1)-ésimo término de la serie s_n. Éste y el siguiente son iguales, respectivamente, a:

$$s_n = |a_n||x^n| \qquad\qquad s_{n+1} = |a_{n+1}||x^{n+1}|$$

Formemos, ahora, la razón entre ambos con el fin de aplicar el criterio de d'Alembert:

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|$$

Supongamos que el límite cuando $n \to \infty$ de esta razón existe y vale l. Es decir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$$

Luego, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|s_{n+1}|}{|s_n|} = l|x|$$

Obviamente, si $|x| < \frac{1}{l}$, entonces $l|x| < 1$ y la serie convergirá. En consecuencia, la serie original (sin los valores absolutos, también será convergente y además será **absolutamente convergente**. Por el contrario, si $|x| > \frac{1}{l}$, entonces $l|x| > 1$ y tanto la serie de valores absolutos como la original, divergirán.

Por tanto, $r = \frac{1}{l} \geq 0$ es el radio de convergencia de una serie de potencias y tenemos que:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Queda una pregunta sin resolver en el caso que $r > 0$: ¿Qué sucede en los puntos de frontera dell intervalo de convergencia? Es decir, ¿qué sucede cuando $x = r$ o $x = -r$? Para analizar la convergencia o divergencia en estos puntos, analizaremos las dos series de números reales separadamente.

Ilustremos este particular con un ejemplo sencillo. Tomemos la siguiente serie de potencias:

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Aquí los coeficientes n-ésimo y (n+1)-ésimo son:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Luego podemos determinar el radio de convergencia calculando el siguiente límite:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Así pues, la serie en cuestión, converge para valores de la variable x en el intervalo $]-1,1[$. Veamos ahora qué sucede en los puntos extremos, es decir, en $x = -1$ y en $x = 1$.

En $x = 1$, obtenemos la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

que sabemos, por el Mathblock “Series de números reales” que diverge. Por el contrario, cuando $x = -1$, la serie que obtenemos es alternada y converge:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

En virtud del **criterio de convergencia de Leibniz para series alternadas,** sabemos que esta serie converge. Basta con darse cuenta que el límite del valor absoluto del término general tiende a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Utilizaremos este mismo ejemplo para ilustrar el procedimiento de cálculo de la suma de una serie infinita de números reales (en este caso, alternada) a partir de integración y derivación de series de potencias.

- ### Derivación e integración de series de potencias [3]

Si una función está representada por una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-a)^j$$

en un intervalo abierto $(a-r,a+r)$, se puede demostrar que dicha función es continua en ese intervalo, y su integral en cualquier subintervalo cerrado puede calcularse integrando la serie término a término. En particular para todo x de $(a-r,a+r)$, tenemos:

$$\int_a^x f(t)dt=\sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_a^x (t-a)^j\, dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+1}(x-a)^{j+1}$$

Se puede demostrar que el radio de convergencia de las serie integrada es igual al de la serie original.

Recíprocamente, se demuestra que para toda función $f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-a)^j$ de intevalo de convergencia $(a-r,a+r)$, entonces tenemos que:

1. la función derivada de dicha serie existe y es igual a:

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\sum_{j=1}^{\infty} j a_j (x-a)^{j-1}$$

2. su radio de convergencia, r, es idéntico al de la serie $f(x)$.

En el punto anterior vimos como la serie de números reales alternada:

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$$

converge. Vamos ahora a determinar su valor numérico. Empecemos considerando la siguiente serie de potencias

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

Esta serie corresponde a una serie formada a partir de la progresión geométrica de razón x, que converge para $x<1$, siendo su suma igual a $\frac{1}{1-x}$. Así, dentro del intervalo de convergencia, podemos escribir:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$$

Esta igualdad puede ser considerada como la expansión de la función $\frac{1}{1-x}$ en serie de potencias. Vamos ahora a reemplazar la variable $-x$ por z con lo que la expresión se convierte en:

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots$$

Si tomamos $0 \le |z| \le |x| < 1$ la igualdad que acabamos de escribir puede ser integrada respecto a z entre 0 y x, siguiendo las expresiones dadas al principio de este punto. Con ello podemos escribir:

$$\int_0^x \frac{1}{1+z}dz=\int_0^x 1\cdot dz-\int_0^x zdz+\int_0^x z^2dz-\int_0^x z^3dz+\ldots+(-1)^n\int_0^x z^n dz+\ldots$$

Integrando, obtenemos:

$$\ln(1+z)\Big|_0^x=\frac{z}{1}\Big|_0^x-\frac{z^2}{2}\Big|_0^x+\frac{z^3}{3}\Big|_0^x-\frac{z^4}{4}\Big|_0^x+\ldots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x+\ldots$$

y finalmente:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Esta expresión es válida siempre que $|x|<1$ y también para $x=1$ puesto que hemos demostrado antes que la serie numérica asociada, converge. Así pues:

$$\ln(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$$

Y la serie que nos ocupaba tiene por suma:

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots=-\ln(2)$$

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

- **Determinación del radio de convergencia de una serie de potencias [5]**

Con el propósito de ilustrar las posibilidades de Mathcad a la hora de determinar el intervalo de convergencia y la suma de series de números reales, vamos a estudiar la siguiente serie de potencias de Taylor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{4n3^n}$$

En primer lugar vamos a calcular el radio de convergencia r. $r = \frac{1}{l}$ con $l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$:

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4(n+1)3^{n+1}}}{\frac{1}{4n3^n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$$

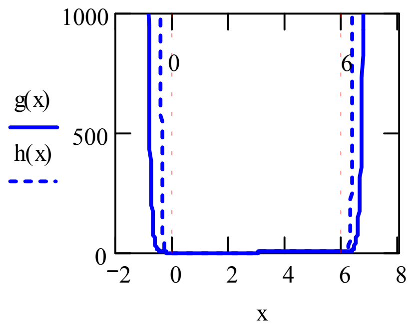
Por tanto, $r = 3$, y la serie será convergente para valores de la variable x tales que $|x-3| < 3$, es decir, valores entre 0 y 6 ($0 < x < 6$).

Comprobemos estos resultados con Mathcad.

Para ello barremos el intervalo de la recta real entre –2 y 8 donde debería encontrarse el intervalo de convergencia. En lugar de calcular la suma de infinitos términos, basta con sumar los 50 y los 100 primeros para ver que fuera del intervalo de convergencia el valor numérico se dispara.

En efecto, para valores dentro del intervalo]0,6[la serie converge.

$$g(x) := \sum_{n=1}^{50}\frac{(x-3)^n}{4n3^n} \qquad h(x) := \sum_{n=1}^{100}\frac{(x-3)^n}{4n3^n}$$



Estudiemos ahora el comportamiento en los puntos de frontera. En $x = 0$ tenemos la serie de potencias se convierte en la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n}$$

que es convergente puesto que es la **serie armónica alternada** con un factor multiplicativo $\frac{1}{4}$.

Por el contrario, en $x = 6$ tenemos la serie de potencias se convierte en la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$$

que es divergente puesto que es la **serie armónica** con un factor multiplicativo $\frac{1}{4}$. Entonces el intervalo de convergencia de la serie es $[0,6[$.

- **Determinación de la suma de una serie númerica mediante derivación e integración de series de potencias**

Para ilustrar las posibilidades que existen para sumar una serie numérica infinita a partir de una serie de potencias, demostraremos que la expresión siguiente es cireta mediante la construcción de una serie de potencias adecuada:

$$\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2}+\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}+\frac{\sqrt{2}}{5\cdot 8}+\frac{\sqrt{2}}{7\cdot 16}+\frac{\sqrt{2}}{9\cdot 32}+\ldots=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

Para demostrar esta igualdad basta con desarrollar el término de la izquierda para obtener el de la derecha. Empecemos simplificando cada uno de los términos de la expresión a la izquierda:

$$\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2}+\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}+\frac{\sqrt{2}}{5\cdot 8}+\frac{\sqrt{2}}{7\cdot 16}+\frac{\sqrt{2}}{9\cdot 32}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{1}{5\cdot 4\sqrt{2}}+\frac{1}{7\cdot 8\sqrt{2}}+\frac{1}{9\cdot 16\sqrt{2}}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2^{1/2}}+\frac{1}{3\cdot 2^{3/2}}+\frac{1}{5\cdot 2^{5/2}}+\frac{1}{7\cdot 2^{7/2}}+\frac{1}{9\cdot 2^{9/2}}+\ldots$$

Esta serie numérica puede considerarse como la serie de potencias de *x*:

$$s(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots$$

evaluada en $x=1/\sqrt{2}$. Si derivamos esta serie numérica, vamos a poder efectuar la suma de sus infinitos términos. Derivando, obtenemos la serie de potencias:

$$\frac{ds(x)}{dx}=1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots$$

cuya suma, dentro del radio de convergencia de valor 1, R=1, es, al tratarse de una serie geométrica de razón x^2:

$$\frac{ds(x)}{dx}=1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots=\frac{1}{1-x^2}$$

Como $x=1/\sqrt{2}$ está dentro del radio de convergencia alrededor de *x=0*, esta suma sirve para solucionar la serie numérica que nos ocupa.

Integrando la última ecuación diferencial, obtenemos:

$$s(x)=\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=\int\left(\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln(1+x)+C$$

Determinamos el valor de la constante *C* sustituyendo la variable *x* por *0* en esta expresión y comparando con el valor que toma *s(x)* antes de la derivación, suma e integración, es decir:

$$s(0)=-\frac{1}{2}\ln(1-0)+\frac{1}{2}\ln(1+0)+C=C$$

$$s(x)\big|_{x=0}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots\bigg|_{x=0}=0$$

Por lo tanto la constante *C* tiene que ser igual a cero. Con esto hemos llegado a la expresión de la suma de la serie de potencias introducida:

$$s(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\ldots=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos, podemos reescribirla como:

$$s(x)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

o como:

$$s(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{-(1+x)}{(-1+x)}\right)$$

Verifiquemos este resultado **analítico** con Mathcad utilizando la instrucción de simplificación *Symbolic Evaluation.*

A diferencia del resultado que nosotros hemos obtenido, Mathcad nos proporciona una expresión que tanto sirve para valores negativos como positivos. Para recuperar la expresión que hemos obtenido nosotros, utilizamos la instrucción *Assume* que podemos introducir mediante el menú al final de *View* > *Toolbars* > *Symbolic*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2\cdot n-1} \to \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot \ln\left[\left[\frac{\left[1+\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[1-\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}\right]\right] \text{ simplify} \to \frac{1}{2}\cdot \operatorname{csgn}(x)\cdot \ln\left[\frac{-(1+\operatorname{csgn}(x)\cdot x)}{(-1+\operatorname{csgn}(x)\cdot x)}\right] \text{ assume}, x>0 \to \frac{1}{2}\cdot \ln\left[\frac{-(1+x)}{(-1+x)}\right]$$

Queda solamente sustituir $x = 1/\sqrt{2}$ para conocer el valor de la suma de los infinitos términos de la serie numérica de partida:

$$\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2}+\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}+\frac{\sqrt{2}}{5\cdot 8}+\frac{\sqrt{2}}{7\cdot 16}+\frac{\sqrt{2}}{9\cdot 32}+\ldots = s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}}$$

Simplificando, obtenemos la igualdad a probar:

$$\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2}+\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}+\frac{\sqrt{2}}{5\cdot 8}+\frac{\sqrt{2}}{7\cdot 16}+\frac{\sqrt{2}}{9\cdot 32}+\ldots = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

Verifiquemos este resultado **numérico** con Mathcad utilizando la instrucción de simplificación *Symbolic Evaluation*	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{(2n-1)2^{n}} \to \frac{1}{2}\cdot \ln\left[\frac{\left(1+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)}\right]$

CONCLUSIONES

Toda serie de potencias viene caracterizada por su radio de convergencia. Para valores de la variable dentro de dicho radio de convergencia, la serie converge, es decir, la suma de sus infinitos términos converge a un valor finito. Determinar el radio de convergencia es fundamental para poder manipular la serie de potencias como una función dentro de su dominio de existencia. Fuera del intervalo o círculo de convergencia determinado a partir del radio de convergencia, la función diverge y, por tanto, su utilización matemática es puramente formal, en principio.

Derivar e integrar una función definida como la suma infinita de potencias de la variable sólo puede realizarse en el interior del intervalo de convergencia. Es allí donde somos capaces —como hemos visto— de sumar dicha serie o su derivada/integral a fin de poder indirectamente determinar el valor de la suma de una serie de números reales. En este campo de las matemáticas, donde la comprobación de resultados no es fácil, Mathcad nos proporciona una inestimable ayuda.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. M. Ortega (1990): "Introducción al Análisis Matemático", Manuales de la Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

[2] V.A. Kudryasvtsev and B.P. Demidovich (1981): "A brief course of Higher Mathematics", Mir Publishers, Moscú, p. 447-459.

[3] T.A. Apostol (1981): "Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal", Reverté, Barcelona, p. 524-542.

[4] M. R. Spiegel (1970): "Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas", Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill, Mexico, p. 110-113.

[5] R. Calm, N. Coll, y M.R. Estela (1992): "Problemas de cálculo", Micromar, Barcelona, p. 229-249.

[6] R. Courant and F. John (1976): "Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático", Limusa, México, p. 459-463.

ENLACES

[W1] http://www.satd.uma.es/a_valverde/aula-calculo/calculo.html
Excelente aula virtual con apuntes muy completos de series funcionales.

[W2] http://www.ugr.es/~fjperez/Ejerc_suc_ser_func_screen.pdf
62 páginas de apuntes y ejercicios de sucesiones y series de funciones.

[W3] http://www.monografias.com/trabajos11/traaprox/traaprox.shtml#termposit
Monografía sobre aproximaciones polinomiales, sucesiones y series infinitas.

[W4] http://math.uprm.edu/~josediaz/seriesdepotencias.doc
Resumen conciso de las propiedades de las series de potencias. Incluye derivación e integración.

[W5] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/apuntes/
Apuntes de series de potencias.

[W6] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/problemas/
Problemas y ejercicios de series de potencias.

[W7] http://planetmath.org/encyclopedia/PowerSeries.html
Página web de PlanetMath.org dedicada a las series de potencias (en inglés). Además de la definición incluye como ejemplos las series de Taylor y las series geométricas.

[W8] http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&name=FormalPowerSeries
Página web de PlanetMath.org dedicada a las series formales de potencias (en inglés). Además de la definición se realiza una construcción formal, se relacionan las propiedades y se estudia su comportamiento como funciones.

[W9] http://www.math-atlas.org
Contiene un módulo sobre "Sucesiones, series y sumabilidad" (en inglés).