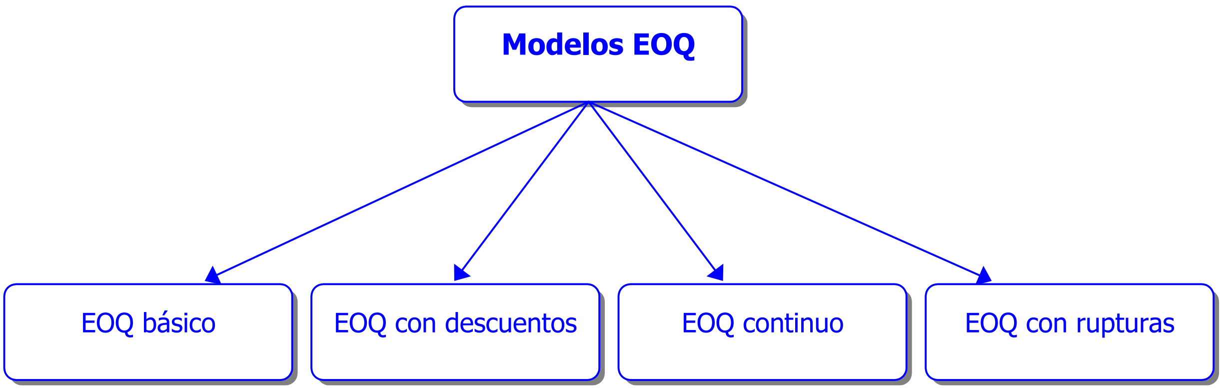
GESTIÓN DE STOCKS: MODELOS DETERMINISTAS

Autores: Ángel A. Juan (ajuanp@uoc.edu), Rafael García Martín (rgarciamart@uoc.edu).

INTRODUCIÓN

Con el fin de satisfacer la demanda a tiempo, las empresas suelen mantener cierto nivel de inventario o stocks en sus almacenes. Esta previsión resulta especialmente importante cuando un producto tiene una demanda fuertemente estacional o cuando la demanda ha de servirse en un período temporal relativamente corto. El propósito de este *math-block* es presentar una serie de modelos, todos ellos variantes del Modelo EOQ (*Economic Order Quantity*) que nos pueden ser útiles a la hora de tomar decisiones sobre inventarios cuando la demanda es conocida.

Básicamente, estos modelos intentarán dar una respuesta a las preguntas que normalmente se plantea el departamento de gestión de inventarios: **(1) ¿Cuándo lanzar una orden de producción o de compra?, y (2) ¿Cuál debe ser el tamaño óptimo de dicho pedido?.**



TIPOS DE STOCKS

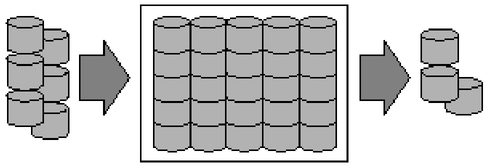
Distinguiremos cuatro tipos de stocks posibles según la función que éstos desempeñen:

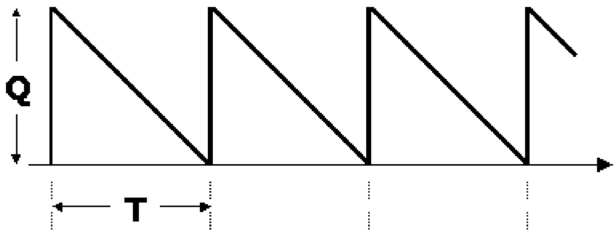
- **Stocks de ciclo:** Muchas veces no tiene sentido producir o comprar materiales al mismo ritmo en que son solicitados, ya que resulta más económico lanzar una orden de compra o de producción de volumen superior a las necesidades del momento, lo que dará lugar a este tipo de stocks.
- **Stocks estacionales:** Algunos productos presentan una demanda muy variable a lo largo del año, aumentando mucho en determinados meses y disminuyendo en otros (juguetes, helados, refrescos, etc.). Así, es lógico que la producción sea mayor que la demanda en determinados períodos, por lo que se generará un stock de carácter estacional.
- **Stocks de seguridad:** Suponen una garantía frente a posibles aumentos repentinos de la demanda.
- **Stocks de tránsito:** Su función es actuar cómo reserva a fin de mantener el flujo continuo de materiales entre las distintas fases del proceso productivo.

Financiado por la Secretaría de Estado de Educación y Universidades (MECD)

CONCEPTOS BÁSICOS

Incluso en aquellos casos en que deseemos mantener un nivel de inventarios constante, dicho nivel variará cuando la demanda solicitada (*salidas*) difiera de las previsiones o cuando la entrada de material (*entradas*) no coincida con lo esperado.





De todas formas, no siempre será deseable mantener un nivel de stocks constante. Así, por ejemplo, el sistema de producción podría abastecerse de forma intermitente con una cantidad fija Q, la cual se incorporaría a intervalos regulares de T unidades temporales, mientras que la salida se podría producir según una tasa constante D.

Características de la Demanda

A continuación resumimos en la tabla siguiente las principales características de la demanda:

Continua o Discreta	La unidad de medida de la demanda puede variar según el entorno y la presentación del artículo concreto (unidades, centenas, litros, kilogramos, etc.)
Determinista o probabilística	Hay casos en que la demanda futura se supone perfectamente conocida; otras veces se supone que los valores de la demanda son aleatorios
Dependiente o independiente.	La demanda de componentes dependerá de la demanda de productos finales, mientras que la de estos últimos se considerará independiente
Homogénea o heterogénea	La demanda es homogénea si su valor es constante en el tiempo
Diferida o Perdida	Si no se satisface la demanda (ruptura de stocks), a veces será posible diferir la entrega

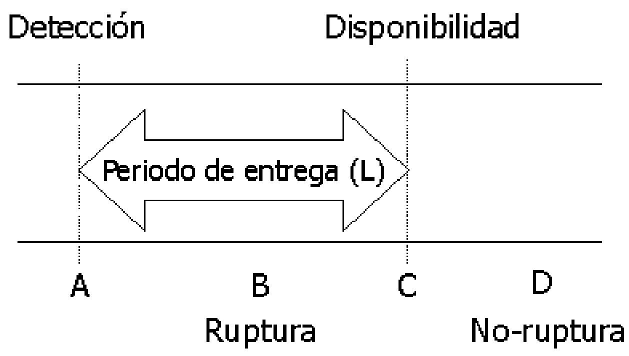
Tipos de Costes

En la tabla siguiente presentamos los principales costes asociados a los inventarios:

Coste de Adquisición	Se compone de una parte fija (coste de lanzamiento o de emisión del pedido), y de otra variable (coste variable de adquisición). El coste de lanzamiento se refiere a la compra de material a un proveedor externo (correo, teléfono, tarea administrativa, carga, transporte, etc.) y a la preparación de los pedidos de artículos manufacturados en la misma empresa (puesta a punto de máquinas, limpieza, etc.). El coste variable de adquisición resulta de multiplicar el valor unitario del artículo por el nombre de artículos del pedido (siempre que no haya descuentos en función de las cantidades adquiridas)
Coste de Posesión	Debido a la creación y mantenimiento de la capacidad del almacén (alquiler, electricidad, maquinaria, vigilancia, etc.), a la manipulación de material y trabajos administrativos, a los gastos derivados de los seguros internos y externos, a variaciones del valor de los bienes motivados por el desgaste, y al coste de oportunidad del capital (dinero que se deja de ganar por mantener inmovilizado en stock el capital en vez de invertirlo)
Coste por demanda Insatisfecha	Aparece cuando no es posible atender la demanda por falta de existencias (ruptura de stocks)

Períodos de Entrega y de Reaprovisionamiento

- Período de entrega (**L**): es el tiempo que transcurre entre la detección de la necesidad de efectuar un pedido y el instante en que el material correspondiente está a punto para su consumo o uso. A veces el período de entrega es conocido, mientras que la demanda no; otras veces ambos tienen un carácter probabilista. Este desconocimiento puede dar lugar a situaciones no deseables como las mostradas en la figura: en el instante A se detecta la necesidad de material y se lanza una orden de pedido. El material estará disponible para el consumo en el instante C; si la necesidad real de material se produce en el instante B, se producirá una ruptura de stocks y la demanda quedará insatisfecha; si, por contra, la necesidad surge en el instante D, entonces se habrá producido un reaprovisionamiento precipitado que repercutirá sobre los costes de posesión de stocks.



- Período de reaprovisionamiento (**R**): es el tiempo durante el cual la única protección de que dispone el sistema productivo para afrontar una posible ruptura de stocks es el nivel de los inventarios. Cuando se dispone de un sistema de control continuo y, por tanto, se conoce el nivel de stock en todo momento, el período de reaprovisionamiento coincide con el período de entrega (**R**=**L**). Cuando el sistema de información es de revisión periódica, el período de reaprovisionamiento es igual al período de revisión (**T**) más el de entrega (**R**=**L**+**T**).

Políticas de Gestión de Inventarios y Métodos de Reaprovisionamiento

Una **política de gestión de stocks** sirve para definir: (1) **¿Cuándo se ha de solicitar material?**, y (2) **¿Cuánto material se ha de pedir?**.

Para la primera cuestión se puede recurrir a fijar un nivel de referencia para el stock (**punto de pedido**, **s**), y lanzar una orden cada vez que la posición del stock sea inferior a este valor; otra alternativa consiste en fijar un período de revisión, **T**, y efectuar un pedido en instantes concretos. Por lo que respecta a la segunda pregunta, es posible solicitar siempre una cantidad fija predeterminada **Q** (**medida del lote**), o la diferencia entre un valor fijo **S** (**cobertura**) y la posición del stock.

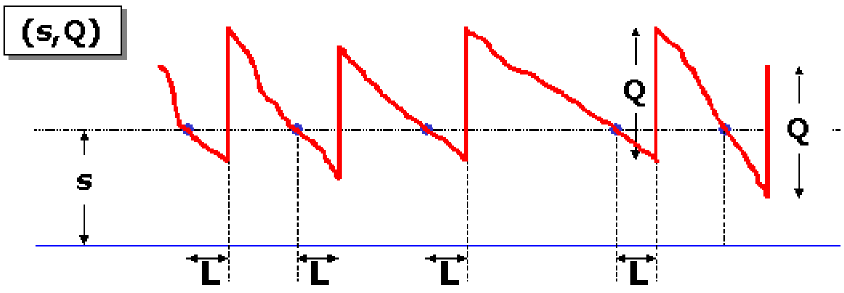
Para describir una política de gestión de stocks bastará pues con indicar, mediante un par ordenado, *cuándo* y *cuánto* se pide. Así, una política (**s**,**Q**) significará que se lanza una orden de tamaño fijo **Q** cada vez que la posición del stock sea inferior a s unidades.

Otras políticas posibles son: (**T**,**S**) con la cual se lleva a cabo un pedido cada **T** unidades de tiempo, de tamaño igual a la diferencia entre la cobertura **S** y el nivel de stock detectado; la política (**s**,**S**), la cual implica la solicitud de un pedido de un tamaño suficiente para abastecer la cobertura S cada vez que la posición del stock sea inferior al punto de pedido s; y la política (**T**,**Q**), en la que se solicitaría un pedido fijo **Q** cada **T** unidades de tiempo.

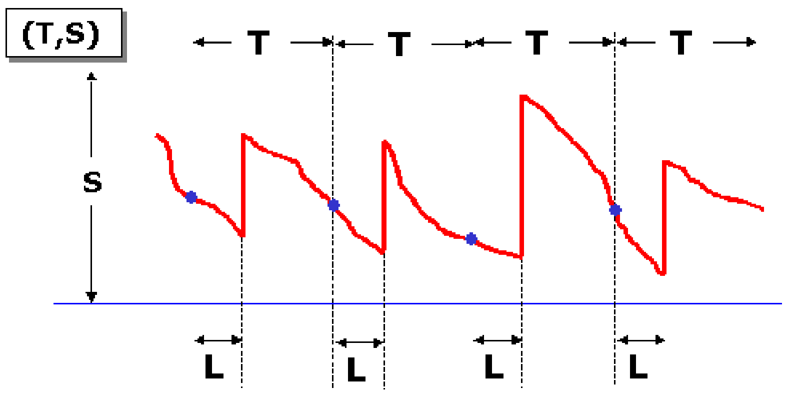
Método de reaprovisionamiento

Un **método de reaprovisionamiento** consiste en aplicar sistemáticamente una política de gestión de stocks con el apoyo de un sistema de información o de revisión. Los métodos más usados son:

- **Método del punto de pedido con revisión continua (s,Q)**: Se tendrá conocimiento del nivel del stock en todo momento. Cuando debido al consumo se llegue a un nivel mínimo (punto de pedido, *s*), se emitirá un pedido de medida fija **Q** (lote económico). El punto de pedido intenta equilibrar los costes opuestos de ruptura y posesión de stocks, mientras que el tamaño del lote económico se calcula para conseguir el equilibrio entre los costes de lanzamiento y los de posesión. Este es el método que siguen los modelos EOQ.



- **Método de reaprovisionamiento periódico con cobertura (T,S)**: se realiza una revisión en instantes concretos, tras intervalos temporales de igual longitud (período de revisión, T). Después de la revisión se lanza una orden de pedido, la cantidad de la cual es determinada a partir de la diferencia entre la cobertura S y el nivel de stock observado.



EL MODELO EOQ BÁSICO O MODELO DE HARRIS-WILSON

Los supuestos en que se fundamenta este modelo son las siguientes:

1) El horizonte temporal que afecta a la gestión de stocks es ilimitado (i.e.: el proceso continua indefinidamente).
2) La demanda es continua, conocida y homogénea en el tiempo (i.e.: si la tasa de consumo es **D** unidades/año, la demanda mensual es **D**/12 unidades/mes, etc.).
3) El período de entrega, **L**, es constante y conocido.
4) No se aceptan rupturas de stock (i.e., debe haber siempre stock suficiente para satisfacer la demanda).
5) El **coste de adquisición**, C_A u.m./unidad, es constante y no depende del tamaño del lote (no hay descuentos por grandes volúmenes de compra).
6) La entrada del lote al sistema es instantánea una vez transcurrido el período de entrega.
7) Se considera un **coste de lanzamiento** de C_L u.m./pedido y un **coste de posesión de stock** igual a C_P u.m./unidad y año.

Bajo estas hipótesis, lo que resulta más económico es organizar los pedidos de manera que se produzca la entrada de un lote al sistema en el momento en que el nivel de stock sea nulo; por tanto las órdenes de emisión de los pedidos se han de realizar en instantes en que el nivel de stock sea el mínimo imprescindible para satisfacer la demanda durante el período de entrega.

El punto de pedido **S** ha de ser:

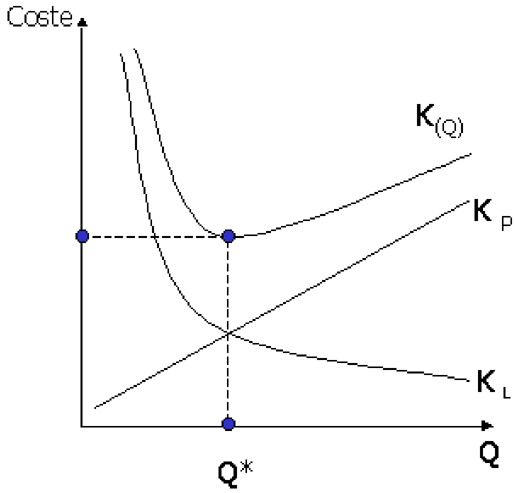
$$S = D \cdot L.$$

Además, todos los lotes han de tener el mismo tamaño, dado que los parámetros del modelo se mantienen constantes a lo largo del tiempo, y que el horizonte es ilimitado.

Si cada pedido es de un volumen igual a **Q**, para satisfacer la demanda anual **D** habrá que ordenar **D/Q** pedidos/año (frecuencia de reaprovisionamiento **N**); la inversa de este valor representará el tiempo que transcurre entre dos entradas consecutivas al sistema (tiempo de ciclo de aprovisionamiento $\mathbf{T_C}$).

Como el coste de lanzar un pedido es $\mathbf{C_L}$ u.m., tendremos que el **coste anual de lanzamiento** $\mathbf{K_L}$ será:

$$\mathbf{K_L} = \mathbf{C_L} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{C_L} \cdot \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{Q}}$$



Este coste está relacionado con el tamaño de lote **Q**, de manera que si dicho tamaño crece, el número de lanzamientos se reduce y, por consiguiente, el coste anual de lanzamiento disminuirá.

El **coste anual de adquisición** $\mathbf{K_A}$ depende de las unidades solicitadas; como la demanda anual **D** es conocida y se supone que todas las unidades tienen el mismo valor unitario, $\mathbf{C_A}$, independientemente del momento en que se solicita y de las cantidades que se requieren (no hay descuentos), la adquisición de **D** unidades supondrá un coste

$$\mathbf{K_A = C_A * D}$$

El **coste anual de posesión de stock** $\mathbf{K_P}$ está relacionado con el nivel medio del stock mantenido a lo largo del año. Bajo los supuestos considerados, el nivel de stock oscila entre 0 y **Q**. Dado que la demanda es homogénea y no se permiten rupturas de stock, el nivel medio del inventario será igual a **Q**/2; como mantener una unidad de producto en stock durante un año tiene un coste de posesión de $\mathbf{C_P}$ u.m., el coste anual de posesión será:

$$\mathbf{K_P = C_P * Q}/2$$

Observar que conforme aumenta el tamaño del lote **Q**, también aumenta el coste anual de posesión $\mathbf{K_P}$.

El **coste total anual de stock** será la suma los tres costes anteriores. En todo caso, los **costes relevantes** en la gestión de stocks (aquellos sobre los cuales nuestras decisiones pueden influir) son el coste anual de lanzamiento, K_L , y el coste anual de posesión, K_P, dado que el coste anual de adquisición no depende ni del tamaño del lote ni de las fechas en que se ordenen los pedidos.

Por tanto, el coste relevante anual K será: $K = K_L + K_P$ u.m. Si consideramos K = K(Q), resulta inmediato comprobar que esta función toma un valor mínimo K* asociado a un tamaño de lote óptimo (Q*):

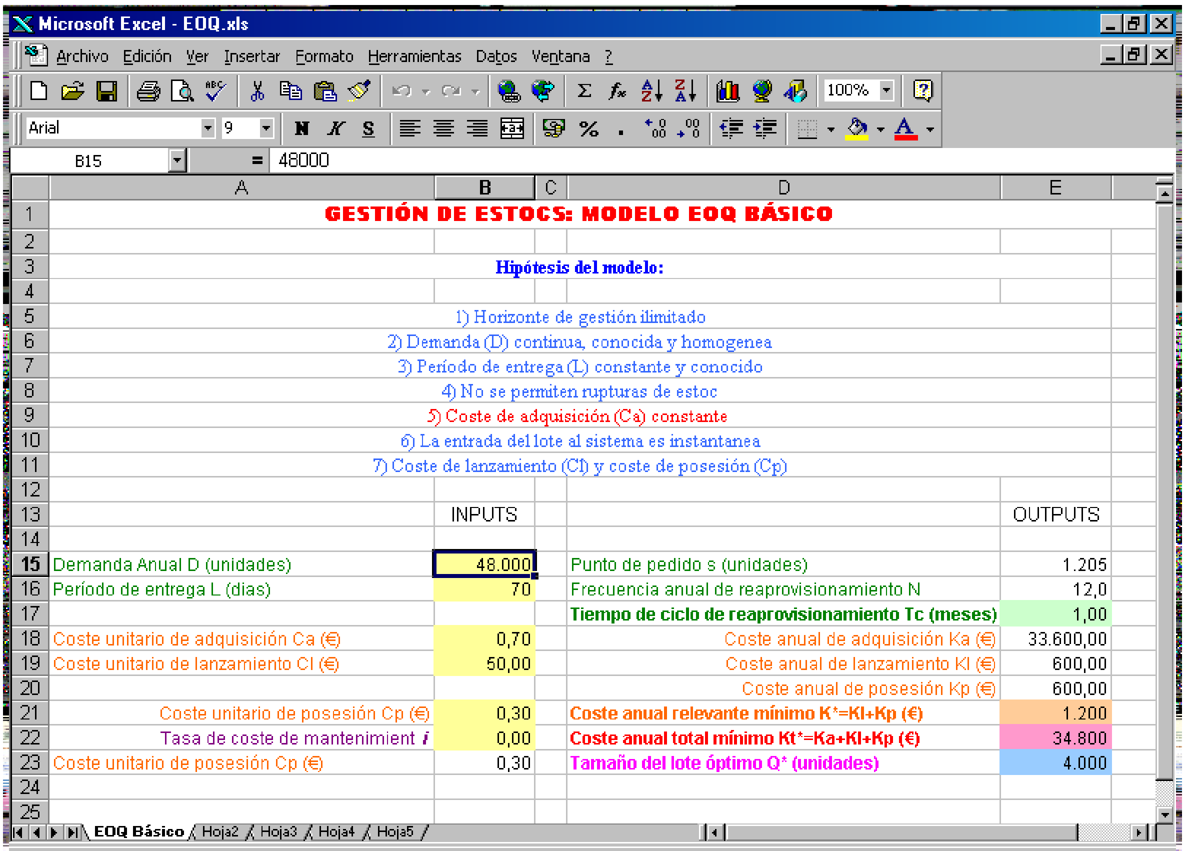
$$\mathbf{Q}^* = \sqrt{\frac{2\,\mathbf{C_L}\,\mathbf{D}}{\mathbf{C_P}}}$$

Esta cantidad **Q*** recibe el nombre de **lote económico** (*Economic Order Quantity*). Además, en este modelo, el lote economico es justamente el valor que iguala los costes anuales de lanzamiento y posesión[1].

En la fórmula anterior, el coste unitario de posesión, C_P, se expresa a menudo como el producto de una tasa de coste de mantenimiento *i* , por el valor unitario del artículo, C_A. La tasa *i* representa pues el coste (en €) de mantener en stock material por valor de 1 €, y puede englobar conceptos tales como el tipo de interés que la empresa podría obtener en una inversión alternativa de riesgo similar, el porcentaje de pérdidas anuales resultantes del almacenamiento y manipulación de productos, las pérdidas por robo, el coste del seguro que cubre los stocks, etc.

A continuación resolveremos un ejemplo de gestión de stocks basado en este modelo con la ayuda del fichero EOQ.xls , creado con la hoja de cálculo EXCEL:

> *Una estación de servicio vende 1740 litros de gasolina al mes. Cada vez que la estación pide una cuba para rellenar sus tanques ha de desembolsar 50 € en concepto de transporte más 0,70 € por cada litro que solicite. El coste anual de mantener un litro de gasolina es de 0,30 €.*
>
> *Queremos determinar el tamaño del lote óptimo y el nº de órdenes anuales que se deberán realizar a fin de minimizar los costes totales. ¿Cuál sería el punto de pedido si el período de reparto fuese de dos semanas?. ¿Y si fuese de diez semanas?.*



Microsoft Excel - EOQ.xls

B15 = 48000

	A	B	C	D	E
1	GESTIÓN DE ESTOCS: MODELO EOQ BÁSICO				
2					
3	Hipótesis del modelo:				
4					
5	1) Horizonte de gestión ilimitado				
6	2) Demanda (D) continua, conocida y homogenea				
7	3) Período de entrega (L) constante y conocido				
8	4) No se permiten rupturas de estoc				
9	5) Coste de adquisición (Ca) constante				
10	6) La entrada del lote al sistema es instantanea				
11	7) Coste de lanzamiento (Cl) y coste de posesión (Cp)				
12					
13		INPUTS			OUTPUTS
14					
15	Demanda Anual D (unidades)	48.000		Punto de pedido s (unidades)	1.205
16	Período de entrega L (dias)	70		Frecuencia anual de reaprovisionamiento N	12,0
17				Tiempo de ciclo de reaprovisionamiento Tc (meses)	1,00
18	Coste unitario de adquisición Ca (€)	0,70		Coste anual de adquisición Ka (€)	33.600,00
19	Coste unitario de lanzamiento Cl (€)	50,00		Coste anual de lanzamiento Kl (€)	600,00
20				Coste anual de posesión Kp (€)	600,00
21	Coste unitario de posesión Cp (€)	0,30		Coste anual relevante mínimo K*=Kl+Kp (€)	1.200
22	Tasa de coste de mantenimient *i*	0,00		Coste anual total mínimo Kt*=Ka+Kl+Kp (€)	34.800
23	Coste unitario de posesión Cp (€)	0,30		Tamaño del lote óptimo Q* (unidades)	4.000
24					
25					

EOQ Básico / Hoja2 / Hoja3 / Hoja4 / Hoja5

[1] Lo cual no es cierto en general.

Aunque la hoja es suficientemente explicativa por sí misma, resulta oportuno observar lo siguiente:

- Para determinar el C_p (casilla B23) sólo es necesario completar la casilla B21 o la B22, ya que la celda B23 =MAX(B21;B22*B18) .

- A la hora de determinar el punto de pedido (casilla E15) se usa la siguiente fórmula: E15 =SI(B15*B16/365<=E23;B15*B16/365;RESIDUO(B15*B16/365;E23)) . En otras palabras, el punto de pedido será L*D siempre que $L^*D \leq Q^*$. En otro caso no tendría sentido tomar s =L*D ya que el nivel de stock siempre sería inferior al punto de pedido, por lo éste no nos serviría como indicador. En tales situaciones haremos la división L*D entre Q* y tomaremos s como el resto de la misma.

El "output" nos dice que lo ideal será pedir 4.000 litros de gasolina cada mes, lo que nos supondrá un coste anual relevante de 1.200 € (observar que en el óptimo, $C_L = C_P$). Además, deberemos hacer los pedidos cuando el nivel de gasolina en los tanques llegue a los 1.841 litros. Si el período de entrega subiese a 70 días, el punto de pedido sería de 1.205 litros, obteniéndose dicha cifra cómo resto de la división L*D entre Q*.

Dado que es difícil estimar con exactitud los valores reales de las variables D y C_P (o alternativamente *i*), resulta muy interesante saber que los costes totales son "robustos" frente a pequeñas variaciones en el valor de Q* , i.e., si el valor obtenido de Q* no difiere mucho de su valor real (el que se obtendría con los valores exactos de D y de C_P), entonces el coste total real no diferirá mucho del previsto.

GESTIÓN DE STOCKS Y ECONOMIAS DE ESCALA

Acabamos de ver que $K^* = K^*_L + K^*_P = (C_L * D/Q^*) + (C_P * Q^*/2)$ es la expresión del coste relevante anual mínimo. Sustituyendo $Q^* = (2^*C_L{}^*D/C_P)^{1/2}$ en la ecuación anterior tenemos: $K^* = (2^*C_L{}^*C_P{}^*D)^{1/2}$ u.m. Utilizaremos esta formulación del coste relevante anual mínimo para explicar en parte las ventajas competitivas de las grandes compañías cuando éstas son capaces de generar suficiente demanda.

Supongamos que dos comerciantes, A y B, tienen la misma demanda, D, e idénticos costes C_L y C_P. Si ambos optimizan los costes de gestión del inventario, cada uno de ellos tendrá un coste igual a K*. ¿Qué ocurriría si decidiesen gestionar conjuntamente sus respectivos stocks?, ¿lograrían reducir costes o, por el contrario, aumentaría el coste total?

La situación inicial en que cada comerciante actúa separadamente supone un coste total: $K^*_{A+B} = K^*_A + K^*_B = 2K^*$ u.m./año. Si los comerciantes deciden constituir un stock conjunto, la demanda anual de la nueva compañía será de 2D y, por tanto, el coste total será: $K^*_{AB} = (2^*C_L{}^*C_P{}^*2D)^{1/2} = 2^{1/2}K^*$ u.m./año, lo que significa que la fusión empresarial habrá logrado reducir los costes de gestión.

Además de la reducción de costes se conseguiría también una disminución en el nivel medio de stock: en la situación inicial, el nivel medio de stock sería de $Q^*/2 + Q^*/2 = Q^*$, mientras que una vez completada la fusión sería de $Q^*_{AB}/2 = [(2^*C_L{}^*2D/C_P)^{1/2}]/2 = 2^{1/2}Q^*/2$.

	Gestión separada A y B	Gestión conjunta AB
Demanda	D + D	2D
Lote económico	$Q^*_A = Q^*_B = Q^*$	$Q^*_{AB} = 2^{1/2}Q^*$
Stock medio	$Q^*/2 + Q^*/2 = Q^*$	$2^{1/2}Q^*/2$
Coste global	$K^*_{A+B} = 2K^*$	$K^*_{AB} = 2^{1/2}K^*$

Estos resultados se pueden extender al caso en que la demanda de un artículo se duplique siempre que la empresa sea capaz de asumirla. Entramos pues en una situación de economías de escala: incrementos idénticos y progresivos de la demanda suponen incrementos decrecientes en los costes de gestión de stocks.

En general, si a una demanda D corresponde un coste K, una demanda nD estará asociada a un coste $n^{1/2}K$ (siempre que el resto de parámetros se mantengan constantes).

EL MODELO EOQ CON DESCUENTOS POR VOLUMEN DE COMPRAS

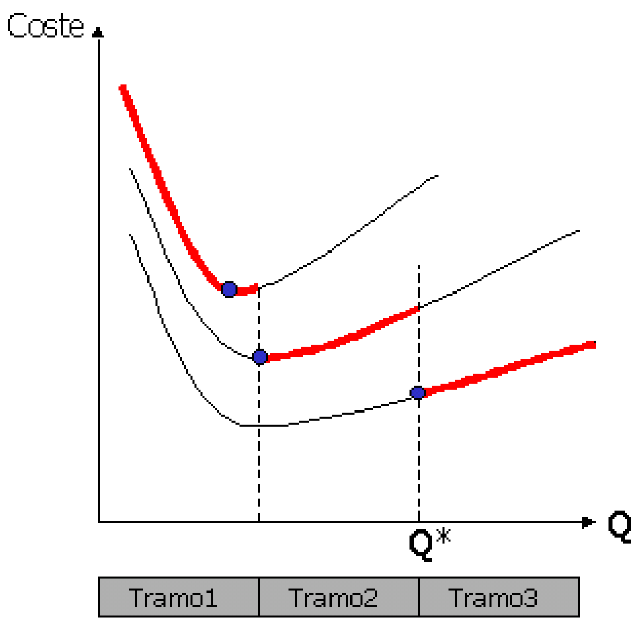
A menudo los suministradores ofrecen descuentos en los precios del producto servido si les compramos en grandes cantidades. Tales descuentos se habrán de tener en consideración a la hora de decidir qué cantidad nos conviene adquirir y cuándo deberemos efectuar los pedidos. Estaremos pues ante un modelo distinto al de Harris-Wilson: C_A ya no será constante, sino que dependerá del volumen del lote comprado, lo que afectará tanto al coste de posesión unitario $C_P = i * C_A$, cómo al coste total anual $K_T = K_A + K_L + K_P$.

Descuentos Uniformes

Los descuentos uniformes implican el mismo descuento en todas las unidades compradas, descuento que será de mayor o menor magnitud según el intervalo o tramo en que se encuentre la cantidad solicitada. Un ejemplo de descuento uniforme sería:

	Cantidad a comprar (unidades) por lote	Precio unitario (€/unidad)
Tramo 1	De 0 hasta 99	50,00
Tramo 2	de 100 hasta 299	49,00
Tramo 3	Más de 300	48,50

Dado que en cada uno de los n tramos el coste de adquisición C_A sí es constante, en realidad este caso se reduce a aplicar el modelo EOQ básico a cada uno de los intervalos, con lo cual obtendremos un coste anual mínimo para cada tramo considerado $K_T(i) = K_A(i) + K_L(i) + K_P(i)$. Obviamente, elegiremos el Q* asociado al menor de estos n costes totales mínimos.



Cabe hacer, sin embargo, una observación importante: ahora Q* será el tamaño del pedido que minimice los costes relevantes $K(Q) = K_L + K_P$ dentro del intervalo considerado (optimización con restricciones). Por tanto, si al hacer los cálculos resulta que el Q* obtenido según la fórmula del modelo anterior no pertenece al intervalo en el que estamos, deberemos tomar como Q* el extremo del intervalo que más se aproxime al valor obtenido, ya que este será el valor óptimo restringido a dicho tramo (pues la función K(Q) es convexa respecto del origen).

Usaremos nuevamente EXCEL para ejemplificar los conceptos anteriores mediante la resolución del siguiente caso:

> *Una gestoría realiza pedidos de discos CD regrabables a un gran almacén. Los discos van en cajas de 10 unidades, y su precio depende del número de cajas solicitadas según se muestra en la tabla anterior (la usada como ejemplo de descuentos uniformes). La gestoría estima que necesitará unos 10.000 discos al año. El coste de lanzamiento de cada pedido es de 100 €, mientras que la tasa anual de mantenimiento se estima en i = 0,20 . Se trata de determinar el tamaño del lote óptimo, los gastos asociados al mismo, y el nº de órdenes anuales que conviene realizar.*

En la nueva hoja de cálculo que usaremos (llamada *Descuentos Uniformes*), deberemos especificar los extremos del tramo que vamos a estudiar en cada momento, así como los costes de adquisición asociados a dicho intervalo. A continuación, se muestran los resultados referentes a cada uno de los tres tramos. De los tres Q* que obtenemos, nos quedaremos con aquel cuyo coste total (K_T) asociado sea menor (en este caso Q* = 300, el cual lleva aparejado un coste total estimado de 50,288.33 €).

INPUTS		OUTPUTS	
Demanda Anual D (unidades)	1.000	Punto de pedido s (unidades)	0
Período de entrega L (días)	0	Frecuencia anual de reaprovisionamiento N	7,0
Extremo inferior del Tramo Qmin (unidades)	100	Tiempo del ciclo de reaprovisionamiento Tc (meses)	1,71
Extremo superior del Tramo Qmax (unidades)	299		
Coste unitario de adquisición Ca (€)	49,00	Coste anual de adquisición Ka (€)	49.000,00
Coste unitario de lanzamiento Cl (€)	100,00	Coste anual de lanzamiento Kl (€)	700,00
		Coste anual de posesión Kp (€)	700,00
Coste unitario de posesión Cp (€)			
Tasa de coste de mantenimiento *i*	0,20	**Coste anual total mínimo Kt*=Ka+Kl+Kp (€)**	50.400,00
Coste unitario de posesión Cp (€)	9,80	**Tamaño del lote óptimo Q* (unidades)**	143

INPUTS		OUTPUTS	
Demanda Anual D (unidades)	1.000	Punto de pedido s (unidades)	0
Período de entrega L (días)	0	Frecuencia anual de reaprovisionamiento N	3,3
Extremo inferior del Tramo Qmin (unidades)	300	Tiempo del ciclo de reaprovisionamiento Tc (meses)	3,60
Extremo superior del Tramo Qmax (unidades)	1.000		
Coste unitario de adquisición Ca (€)	48,50	Coste anual de adquisición Ka (€)	48.500,00
Coste unitario de lanzamiento Cl (€)	100,00	Coste anual de lanzamiento Kl (€)	333,33
		Coste anual de posesión Kp (€)	1.455,00
Coste unitario de posesión Cp (€)			
Tasa de coste de mantenimiento *i*	0,20	**Coste anual total mínimo Kt*=Ka+Kl+Kp (€)**	50.288,33
Coste unitario de posesión Cp (€)	9,70	**Tamaño del lote óptimo Q* (unidades)**	300

Como se puede observar, la estructura de esta nueva hoja es muy similar a la que utilizábamos para resolver el modelo EOQ básico. La única diferencia significativa radica en la determinación de Q*, que ahora vendrá dado por

E23 = SI(RAIZ(2*B19*B14/B23)<=B16;B16;MIN(RAIZ(2*B19*B14/B23);B17)),

expresión que nos viene a decir lo siguiente: “Si el Q* que obtienes está dentro del intervalo considerado, entonces es válido. En caso contrario, toma como Q* el extremo del intervalo que más se aproxime al valor obtenido”.

Descuentos Graduales

Los descuentos graduales o descuentos incrementales se caracterizan porque la reducción de precios no se aplica por igual a todas las unidades adquiridas, sino que las unidades de diferentes tramos de cantidades tienen precios diferentes. Consideremos el siguiente ejemplo:

	Cantidad a comprar (unidades) por lote	Precio unitario (€/unidad)
Tramo 1	de 1 hasta 50	100
Tramo 2	de 51 hasta 100	50 unidades a 100 y el resto a 90
Tramo 3	de 101 en adelante	50 unidades a 100 50 unidades a 90 y el resto a 80

Supongamos que queremos comprar 120 unidades (tramo 3 de la tabla anterior). En tal caso, tendremos que hacer frente a un coste de adquisición "acumulado" de 9.500 € (50*100 + 50*90) más un coste "extra" de 20*80 = 160 €.

Observar pues que, si decidimos adquirir un lote de tamaño Q perteneciente a un tramo cuyo extremo inferior es Q_{min}, podemos descomponer el coste de adquisición del pedido como suma de dos costes: Coste Acumulado + Coste Extra = $A + C_A*(Q - Q_{min} + 1)$, donde C_A representa el coste de adquisición por cada unidad del tramo considerado.

En base a lo dicho, para un pedido de Q unidades, podemos definir el coste medio de adquisición por unidad como $C_{AM} = [A + C_A*(Q - Q_{min} + 1)] /Q$. Como al cabo del año realizaremos D/Q pedidos, el coste anual de adquisición será $K_A = D/Q * [A + C_A*(Q - Q_{min} + 1)]$.

Por su parte, el coste medio de posesión por unidad vendrá dado por $C_{PM} = i * C_{AM}$, por lo que el coste anual de posesión será: $K_P = i * C_{AM} * Q/2$.

Finalmente, el coste anual de lanzamiento será: $K_L = C_L * D/Q$.

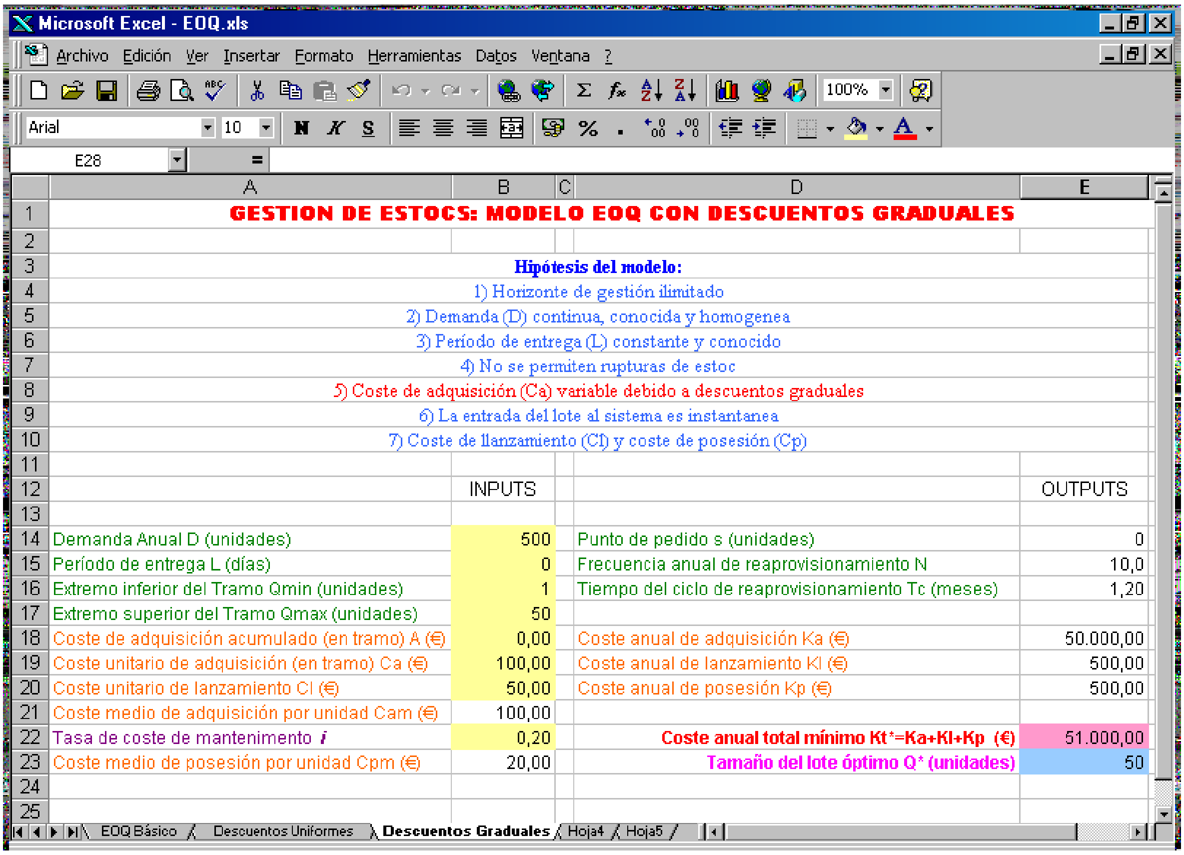
Nuestro objetivo será minimizar el coste anual total $K_T(Q) = K_A + K_P + K_L = D/Q * [A + C_A*(Q - Q_{min} + 1)] + i/2 * [A + C_A*(Q - Q_{min} + 1)] + C_L * D/Q$, función convexa respecto del origen. Derivando esta función e igualando a cero, obtenemos el tamaño del lote que minimiza los costes totales:

$$Q^* = [D^* (A - C_A*Q_{min} + C_A + C_L) / (i/2 * C_A)]^{1/2}$$

Al igual que hacíamos con los descuentos uniformes, la idea será calcular el Q* asociado a cada tramo, y luego elegir aquel cuyos costes asociados sean los más bajos. A la hora de calcular cada Q*, deberemos distinguir entre el caso en que el resultado obtenido al aplicar la fórmula pertenezca al intervalo considerado (entonces éste número será Q*), o el caso en que no (si así ocurre tomaremos el extremo más próximo, por ser la función de costes totales convexa).

> *Supongamos que tenemos una demanda anual de 500 artículos y nuestro proveedor nos ofrece los precios que se muestran en la tabla anterior. Si la tasa de mantenimiento es del 20%, y el coste de lanzamiento es de 50 €, ¿cuál sería el tamaño del lote óptimo?, ¿qué costes lleva asociados este tamaño?.*

Nuevamente haremos uso de EXCEL para diseñar una hoja que nos permita hacer los cálculos de forma rápida (en este caso la llamaremos *Descuentos Graduales*). A continuación se muestran los resultados asociados a cada uno de los tramos:



GESTION DE ESTOCS: MODELO EOQ CON DESCUENTOS GRADUALES

Hipótesis del modelo:

1) Horizonte de gestión ilimitado
2) Demanda (D) continua, conocida y homogenea
3) Período de entrega (L) constante y conocido
4) No se permiten rupturas de estoc
5) Coste de adquisición (Ca) variable debido a descuentos graduales
6) La entrada del lote al sistema es instantanea
7) Coste de llanzamiento (Cl) y coste de posesión (Cp)

	INPUTS		OUTPUTS
Demanda Anual D (unidades)	500	Punto de pedido s (unidades)	0
Período de entrega L (días)	0	Frecuencia anual de reaprovisionamiento N	10,0
Extremo inferior del Tramo Qmin (unidades)	1	Tiempo del ciclo de reaprovisionamiento Tc (meses)	1,20
Extremo superior del Tramo Qmax (unidades)	50		
Coste de adquisición acumulado (en tramo) A (€)	0,00	Coste anual de adquisición Ka (€)	50.000,00
Coste unitario de adquisición (en tramo) Ca (€)	100,00	Coste anual de lanzamiento Kl (€)	500,00
Coste unitario de lanzamiento Cl (€)	50,00	Coste anual de posesión Kp (€)	500,00
Coste medio de adquisición por unidad Cam (€)	100,00		
Tasa de coste de mantenimiento *i*	0,20	**Coste anual total mínimo Kt*=Ka+Kl+Kp (€)**	51.000,00
Coste medio de posesión por unidad Cpm (€)	20,00	**Tamaño del lote óptimo Q* (unidades)**	50

	INPUTS		OUTPUTS
Demanda Anual D (unidades)	500	Punto de pedido s (unidades)	0
Período de entrega L (días)	0	Frecuencia anual de reaprovisionamiento N	5,0
Extremo inferior del Tramo Qmin (unidades)	51	Tiempo del ciclo de reaprovisionamiento Tc (meses)	2,40
Extremo superior del Tramo Qmax (unidades)	100		
Coste de adquisición acumulado (en tramo) A (€)	5.000,00	Coste anual de adquisición Ka (€)	47.500,00
Coste unitario de adquisición (en tramo) Ca (€)	90,00	Coste anual de lanzamiento Kl (€)	250,00
Coste unitario de lanzamiento Cl (€)	50,00	Coste anual de posesión Kp (€)	950,00
Coste medio de adquisición por unidad Cam (€)	95,00		
Tasa de coste de mantenimiento *i*	0,20	**Coste anual total mínimo Kt*=Ka+Kl+Kp (€)**	48.700,00
Coste medio de posesión por unidad Cpm (€)	19,00	**Tamaño del lote óptimo Q* (unidades)**	100

	INPUTS		OUTPUTS
Demanda Anual D (unidades)	500	Punto de pedido s (unidades)	0
Período de entrega L (días)	0	Frecuencia anual de reaprovisionamiento N	1,6
Extremo inferior del Tramo Qmin (unidades)	101	Tiempo del ciclo de reaprovisionamiento Tc (meses)	7,47
Extremo superior del Tramo Qmax (unidades)	500		
Coste de adquisición acumulado (en tramo) A (€)	9.500,00	Coste anual de adquisición Ka (€)	42.409,66
Coste unitario de adquisición (en tramo) Ca (€)	80,00	Coste anual de lanzamiento Kl (€)	80,32
Coste unitario de lanzamiento Cl (€)	50,00	Coste anual de posesión Kp (€)	2.639,98
Coste medio de adquisición por unidad Cam (€)	84,82		
Tasa de coste de mantenimiento *i*	0,20	**Coste anual total mínimo Kt*=Ka+Kl+Kp (€)**	45.129,96
Coste medio de posesión por unidad Cpm (€)	16,96	**Tamaño del lote óptimo Q* (unidades)**	311

En esta hoja, la fórmula más significativa es la que nos calcula el Q* en base a la ecuación deducida anteriormente. Así, la casilla correspondiente será:

E23 = SI(RAIZ(B14*(B18-B19*B16+B19+B20)/(B22/2*B19))<=B16;
B16;
MIN(RAIZ(B14*(B18-B19*B16+B19+B20)/(B22/2*B19));B17))

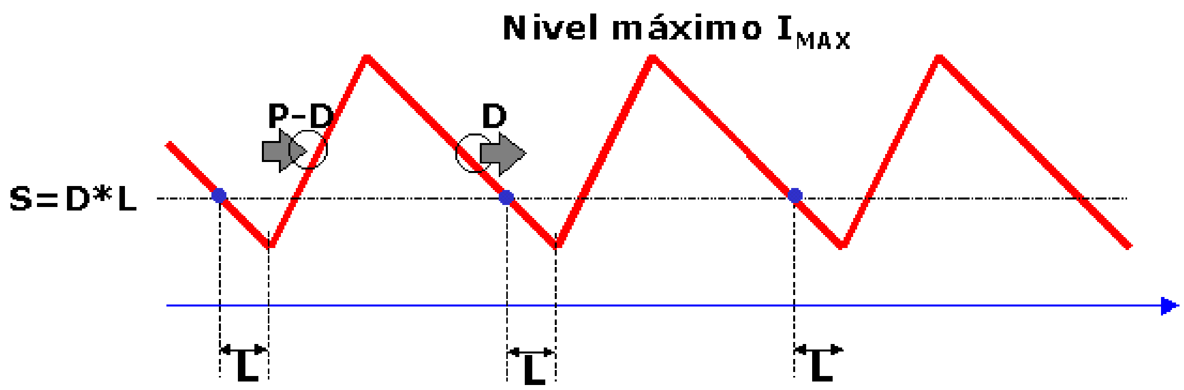
Podemos interpretar esta fórmula de forma similar a como lo hicimos con la de descuentos uniformes.

EL MODELO EOQ DE ENTRADA CONTINUA

En muchas ocasiones, parte de los artículos que se almacenan son producidos por la propia empresa en vez de ser adquiridos a otra compañía ajena. En tales situaciones, el supuesto 6 de que la entrada del lote al sistema es instantánea carece de sentido, ya que no es posible producir todos los artículos de golpe, en especial si consideramos series de producción largas. Más bien sucederá que el proceso productivo va aportando artículos al almacén de forma gradual.

Así, los artículos producidos irán pasando a formar parte del inventario en lotes de transferencia, los cuales serán de tamaño inferior al volumen de la serie producida. En nuestro caso, supondremos que el lote de transferencia es igual a la unidad. Obviamente, partiremos de la hipótesis de que la capacidad productiva anual P será mayor que la demanda anual D, pues en caso contrario no será posible satisfacer dicha demanda de forma indefinida.

Consideraremos que tanto la demanda como la producción son homogéneas en el tiempo, con tasas iguales a D y P unidades al año respectivamente. Al representar este proceso, observaremos que durante el ciclo productivo el nivel de stock aumenta progresivamente a un ritmo constante e igual a la diferencia entre ambas tasas P–D; terminado dicho ciclo, se alcanzará el nivel máximo de stock, I_{max}; a partir de este instante el nivel del inventario se reducirá de forma progresiva según una tasa D hasta llegar a nivel 0; punto en el cual comenzará otro nuevo ciclo.



En cada ciclo productivo se fabricarán Q unidades en un período temporal de Q/P años, dado que se necesitarán 1/P años para producir cada unidad. Durante este período, el nivel de stock (que parte de 0) aumenta a un ritmo constante P–D unidades/año. Así las cosas, el nivel máximo al que se llegará vendrá dado por la ecuación: $I_{max} = (P–D)*Q/P$. A partir de este punto, transcurrirá un tiempo de I_{max}/D años hasta volver al nivel inicia (stocks 0).

En este modelo, el coste anual de lanzamiento seguirá siendo: $K_L = C_L * N = C_L * D/Q$ u.m.

Si suponemos que el coste de adquisición (o de producción) unitario C_A es constante (no hay descuentos por grandes volúmenes de producción), el coste anual de adquisición será, $K_A = C_A * D$ u.m., que no depende de Q y por tanto no es relevante a la hora de minimizar costes.

Finalmente, el coste anual de posesión vendrá dado por la expresión: $K_P = C_P * I_{max}/2$ u.m., ya que ahora el nivel medio del stock será $I_{max}/2$.

En conclusión, el coste anual relevante será $K = K_L + K_P$ u.m., el cual se minimizará para un volumen de producción

$Q^* = [2C_L*D/((1-D/P)*C_P)]^{1/2}$.

En la página siguiente se muestra la hoja de cálculo correspondiente a este modelo (*EOQ continuo*), en la cual aparece la solución al siguiente caso:

> *Una factoría necesita producir 10.000 chasis para coches al año, cada uno de los cuales tiene un coste de producción de 2.000 €. La capacidad productiva anual de la planta es de 25.000 chasis, siendo de 200 € el coste de lanzamiento por orden de producción. Sabiendo que la tasa de mantenimiento es del 25%, determinar el tamaño del lote óptimo a producir. ¿Cuántas órdenes de producción deben ser lanzadas a lo largo de un año?.*

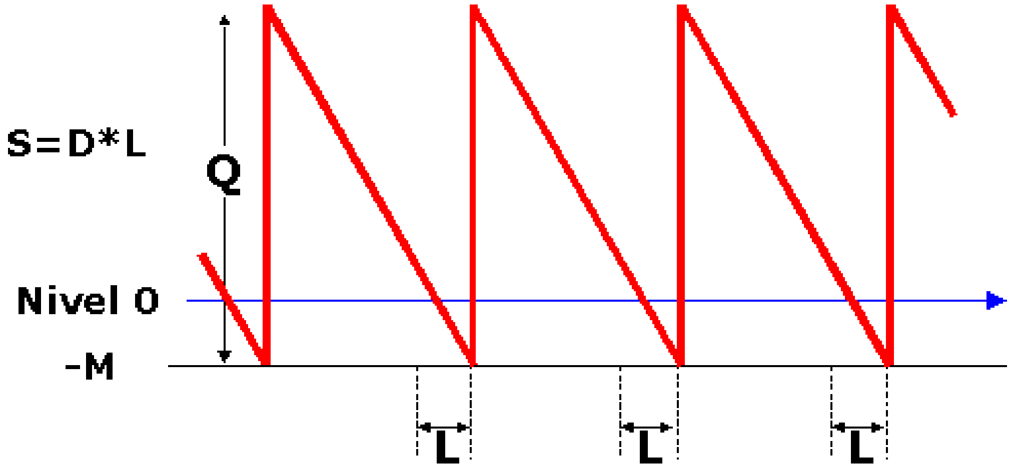
Microsoft Excel - EOQ.xls

	A	B	C	D	E
1	**GESTIÓN DE ESTOCS: EOQ CONTINUO (TAMAÑO DE LAS SERIES PRODUCIDAS)**				
2					
3	**Hipótesis del modelo:**				
4	1) Horizónte de gestión ilimitado				
5	2) Demanda (D) continua, conocida y homogenea				
6	3) Período de entrega (L) constante y conocido				
7	4) No hay rupturas de estoc				
8	5) Coste de adquisición (Ca) constante				
9	6) Entrada del lote al sistema NO es instantanea				
10	7) Coste de lanzamiento (Cl) y coste de posesión (Cp)				
11					
12		INPUTS			OUTPUTS
13					
14	Demanda Anual D (unidades)	10.000		Punto de pedido s (unidades)	0
15	Período de entrega L (días)	0		Frecuencia anual de reaprovisionamiento N	86,6
16	Capacidad Anual de producción P (unidades)	25.000		Tiempo de ciclo de cada lanzamiento (días)	4,21
17				Nivel máximo de estoc Imax (unidades)	69,28
18	Coste unitario de adquisición Ca (€)	2.000,00		Coste anual de adquisición Ka (€)	20.000.000,00
19	Coste unitario de lanzamiento Cl (€)	200,00		Coste anual de lanzamiento Kl (€)	17.320,51
20				Coste anual de posesión Kp (€)	17.320,51
21				Tiempo necesario para fabricar un lote (días)	1,69
22	Coste unitario de posesión Cp (€)			**Coste anual relevante mínimo K*=Kl+Kp (€)**	34.641,02
23	Tasa de coste de mantenimiento *i*	0,25		**Coste anual total mínimo Kt*=Ka+Kl+Kp (€)**	20.034.641,02
24	Coste unitario de posesión Cp (€)	500,00		**Tamaño del lote óptimo Q* (unidades)**	115
25					

EOQ Básico / Descuentos Uniformes / Descuentos Graduales / **EOQ continuo**

EL MODELO EOQ CON RUPTURA DE STOCKS

En muchas situaciones de la vida real la demanda no es satisfecha a tiempo debido a la falta de existencias (rupturas de stock). Cuando esto ocurre podemos estar ante una demanda diferida, o bien ante una demanda perdida. Ambas opciones suponen un coste para la empresa, el cual es mucho mayor en el segundo de los casos (pérdida de la venta, posible pérdida de clientes, mala imagen, etc.). Sin embargo, si el cliente consiente en diferir la entrega de su pedido, cobra sentido considerar posibles rupturas de stock de un tamaño determinado buscando que el coste de diferir las entregas compense los costes de posesión de inventarios. En lo que sigue supondremos que podemos estimar el coste de retardar la entrega de una unidad durante un año en C_D u.m.



La imagen de la derecha representa la evolución de los stocks cuando se considera la posibilidad de diferir la demanda. Suponiendo que el lote entra de forma instantánea al sistema, el nivel del inventario variará entre un valor mínimo negativo, -M (máxima demanda insatisfecha) y un valor máximo igual a Q-M. Partiendo de este valor máximo, el nivel de stock se reduce de forma progresiva al ritmo que marca la tasa de consumo anual D; después de un tiempo igual a (Q-M)/D años se llega al nivel 0, momento en que se produce la ruptura de stocks; durante un període igual a M/D años se dejan de servir unidades, y la posición del stock desciende hasta el valor mínimo –M; en este instante llega un nuevo lote de tamaño Q al sistema, se entrega la demanda diferida y el nivel del inventario vuelve a su valor máximo.

En este modelo, tanto el coste anual de lanzamiento como el coste anual de adquisición son idénticos a los del modelo EOQ básico. El coste anual de posesión, sin embargo, sí resulta distinto. Ello es debido a la variación en el nivel medio de posesión. Además, a la hora de calcular la función de coste total deberemos considerar el coste anual de diferir la demanda K_D. El tiempo de cada ciclo (tiempo entre dos entradas consecutivas de un lote) es igual a Q/D años.

Se pueden distinguir dos períodos por ciclo: el período sin ruptura tiene una duración igual a (Q-M)/D años, y presenta un stock medio de (Q-M)/2 unidades; por su parte, el período de ruptura es igual a M/D años y durante el mismo su stock medio es 0, oscilando el nivel de ruptura entre 0 y M. Así pues, tendremos que el stock medio en cada ciclo será de $(Q-M)^2 / (2D)$ unidades, mientras que el nivel de ruptura medio por ciclo será de $M^2 / (2D)$ unidades. Como al año tendremos D/Q ciclos, el nivel anual medio de stocks será $(Q-M)^2 / (2Q)$, y el nivel anual medio de ruptura $M^2 / (2Q)$.

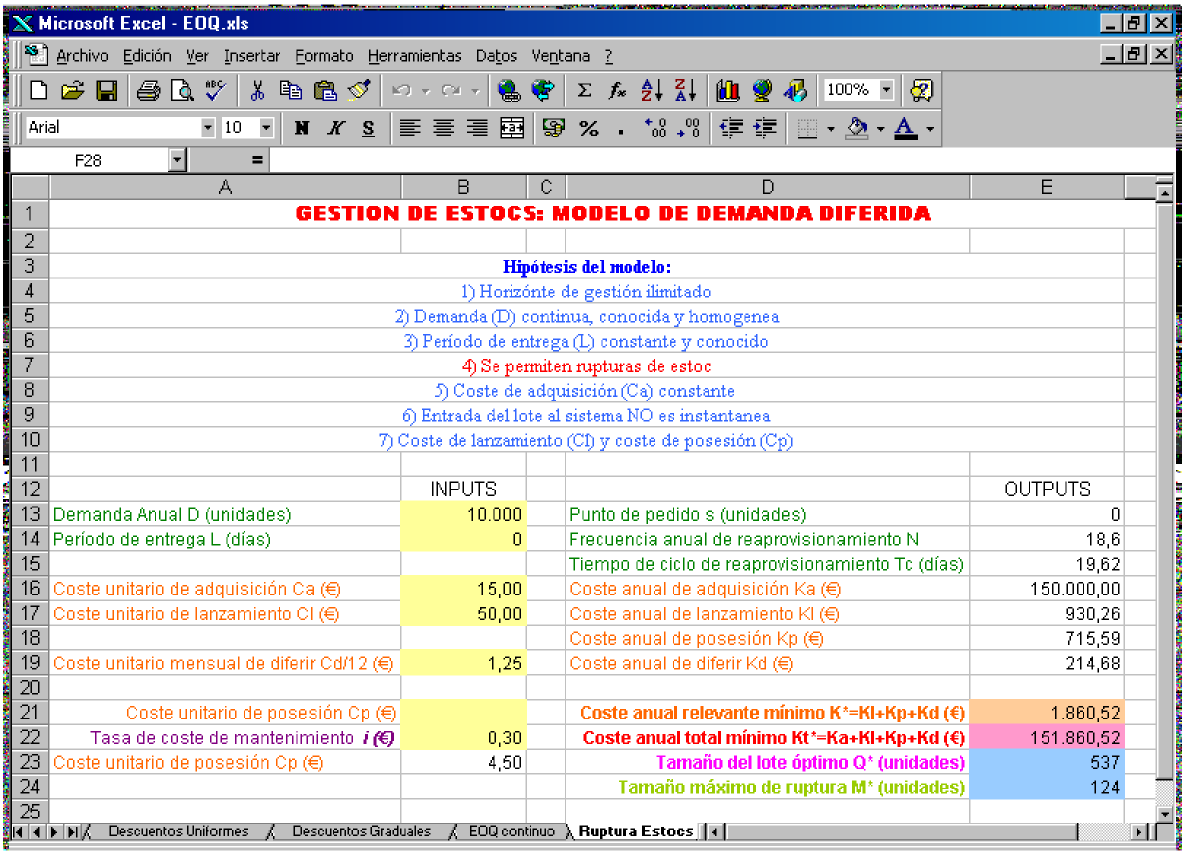
El coste anual relevante tendrá pues la expresión: $K(Q, M) = K_L + K_P + K_D = C_L * D/Q + C_P * (Q-M)^2 / (2Q) + C_D * M^2 / (2Q)$. Se puede demostrar que esta función multivariable es convexa, por lo que alcanzará su valor mínimo cuando: $\partial K / \partial Q = \partial K / \partial M = 0$. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos los tamaños óptimos del lote y del nivel de ruptura:

$$Q^* = [\, 2C_L\, D\, (C_P+C_D) / (C_P\ C_D)\,]^{1/2} \qquad M^* = [\, 2C_L\, D\, C_P / (\, C_D\, (C_P+C_D)\,)\,]^{1/2}$$

Si hacemos tender el coste C_D a infinito, M* tenderá a cero y Q* tenderá al valor que se obtendría con el modelo EOQ básico. Ello es lógico, dado que en tal caso el coste de diferir la entrega se haría prohibitivo y, por tanto, no sería factible considerar rupturas de stock.

Supongamos que una clínica óptica estima sus ventas anuales de monturas para gafas en 10.000 unidades. La clínica hace sus pedidos a un suministrador que le cobra 15 € por cada armazón más 50 € por cada envío. El gerente de la óptica considera que el coste mensual de diferir la entrega de las monturas solicitadas es de 1.25 € (debido a la pérdida de futuras ventas).

Sabiendo que la tasa de mantenimiento anual es del 30%, determinar el tamaño del lote óptimo a adquirir, así como el nivel máximo de ruptura del inventario.



GESTION DE ESTOCS: MODELO DE DEMANDA DIFERIDA

Hipótesis del modelo:
1) Horizónte de gestión ilimitado
2) Demanda (D) continua, conocida y homogenea
3) Período de entrega (L) constante y conocido
4) Se permiten rupturas de estoc
5) Coste de adquisición (Ca) constante
6) Entrada del lote al sistema NO es instantanea
7) Coste de lanzamiento (Cl) y coste de posesión (Cp)

	INPUTS		OUTPUTS
Demanda Anual D (unidades)	10.000	Punto de pedido s (unidades)	0
Período de entrega L (días)	0	Frecuencia anual de reaprovisionamiento N	18,6
		Tiempo de ciclo de reaprovisionamiento Tc (días)	19,62
Coste unitario de adquisición Ca (€)	15,00	Coste anual de adquisición Ka (€)	150.000,00
Coste unitario de lanzamiento Cl (€)	50,00	Coste anual de lanzamiento Kl (€)	930,26
		Coste anual de posesión Kp (€)	715,59
Coste unitario mensual de diferir Cd/12 (€)	1,25	Coste anual de diferir Kd (€)	214,68
Coste unitario de posesión Cp (€)		**Coste anual relevante mínimo K*=Kl+Kp+Kd (€)**	1.860,52
Tasa de coste de mantenimiento *i* (€)	0,30	**Coste anual total mínimo Kt*=Ka+Kl+Kp+Kd (€)**	151.860,52
Coste unitario de posesión Cp (€)	4,50	**Tamaño del lote óptimo Q* (unidades)**	537
		Tamaño máximo de ruptura M* (unidades)	124

HEURÍSTICA SILVER-MEAL PARA DEMANDAS VARIABLES

En todos los modelos EOQ hemos supuesto que la demanda era homogénea a lo largo del año. Sin embargo, esta hipótesis no siempre será cierta: en la vida real hay muchos casos en los que la demanda, aunque de carácter determinista, es variable debido a diversos factores, el principal de ellos, la estacionalidad.

GESTIÓN DE ESTOCS: DEMANDA VARIABLE / heurística SILVER-MEAL

Nº de períodos (de 2 a 12)	6
Coste de lanzamiento Cl (€)	750,00
Tasa de mantenimiento i	0,02
Coste de adquisición Ca (€)	10,00

Períodos t	Dt (unidades)	Q (unidades)	Coste Medio por período Kt (€)	Coste Relevante Total (€)
1	500	500	750,00	750,00
2	3.100	3.600	685,00	1.370,00
3	600	4.200	536,67	1.610,00
4	6.500	10.700	1.377,50	5.510,00
5	7.700	18.400	2.334,00	11.670,00
6	6.500	24.900	3.028,33	18.170,00
7				
8				
9				
10				
11				
12				

VC= 0,49 > 0.20 --> Usar Silver-Meal

Acto seguido presentamos un método que nos ayudará a determinar si el supuesto de homogeneidad es o no razonable. En caso afirmativo, podremos usar los modelos EOQ anteriores.

Pero de no ser así, deberemos recurrir a otros procedimientos (como Silver-Meal) para estimar el tamaño del lote que mejor se ajuste a nuestras necesidades.Supongamos que las demandas observadas en n períodos de tiempo son: $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Definimos el Coeficiente de Variabilidad de la variable aleatoria demanda D como: $CV = Var[D] / E[D]^2$, donde Var[D] y E[D] representan respectivamente la varianza y la esperanza de la v.a. D. Pues bien, la práctica nos dice que si $CV \leq 0{,}20$ nos será lícito considerar que la varianza es homogénea, pero si $CV > 0{,}20$, entonces recurriremos a la técnica de Silver-Meal que se explica a continuación con la ayuda de la hoja *Silver Meal* de nuestro fichero EOQ.xls:

En este ejemplo, como VC > 0.20 usaremos Silver-Meal: supongamos que solicitamos la cantidad justa para satisfacer la demanda del primer período (Q1), es decir, que pedimos 500 unidades. El coste relevante asociado al primer período, K1, sería de 750 €. Observar que dicho coste se deberá exclusivamente al coste de lanzamiento, ya que el pedido se serviría inmediatamente a los clientes (no hay coste de posesión).

Imaginemos ahora que pedimos un lote capaz de cubrir la demanda de los dos primeros períodos. La cantidad solicitada sería de 3.600 unidades. De estas, 500 se servirían inmediatamente y el resto se entregarían al inicio del segundo período; por tanto, tendríamos un stock de 3.100 unidades durante un período (supondrán un gasto de posesión según indica la tasa de mantenimiento). Así, se obtendrá un coste medio por período de K2 = 685 €. Observamos ya que es más económico solicitar este último lote que no el que sólo cubría el primer período.

Si pedimos una cantidad para satisfacer los tres primeros períodos, el tamaño del lote sería de 4.200 unidades. De éstas, 500 se servirían inmediatamente y 3.700 se almacenarían durante el primer período. Gran parte de estas 3.700 unidades, concretamente 3.100, se entregarían al principio del segundo período, quedando 600 en stock hasta el principio del tercero. El coste medio por período sería K3 = 536,67 €. Como se puede apreciar en el "output" anterior, ésta resultará la mejor opción. Por tanto, ordenaremos un pedido de 4.200 unidades con el que cubriremos las demandas de los tres primeros períodos. El coste relevante total de esta operación será de 1.610 €.

Una vez tomada la primera decisión, esperaríamos al principio del cuarto período para tener más información acerca de la demanda futura.

BIBLIOGRAFÍA

Gestión de Inventarios

[1]. Lloyd Enrick, N. (1981), **Gestión de Stocks**. Editorial Deusto Serie C-3.
[2]. Graves, S.C; Rinnoy A.H y Zipkin P.H. (1993), **Logistics of Production and Inventory**, NorthHolland.

Investigación Operativa.

En cualquiera de los siguiente textos es posible encontrar al menos un capítulo dedicado a la gestión de inventarios.

[3]. Hillier, F.S. y Lieberman, G.J. (1991), **Introducción a la Investigación de Operaciones**, McGraw-Hill.
[4]. Kaufmann, A. (1972), **Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones**, Vol I, II y III, CECSA.
[5]. Prawda, (1980), **Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones**, Vol. I y II, Limusa.
[6]. Ravindran, Phillips y Solberg (1987), **Operations Research. Principles and Practice**, Wiley.
[7]. Taha, H.A. (1991), **Investigación de Operaciones**, RA-MA.
[8]. Wagner, R. (1975), **Principles of Operations Research**, Prentice Hall.

ENLACES

[W1] http://www.ujaen.es/dep/admemp/profes/llozano_archivos/Tema09.pdf. Apuntes del profesor Lozano de la Universidad de Jaén.
[W2] http://www.um.es/~geloca/gio/ampliacion/apuntes.html **"Ampliación de Modelos de Investigación Operativa"**. Apuntes del profesor Alfredo Marín del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Murcia.
[W3] http://www.cris.com/~kthill/sites.htm. **Inventory Control Related Sites**. Es sin duda alguna la mejor recopilación de enlaces relacionados con la gestión de inventarios.