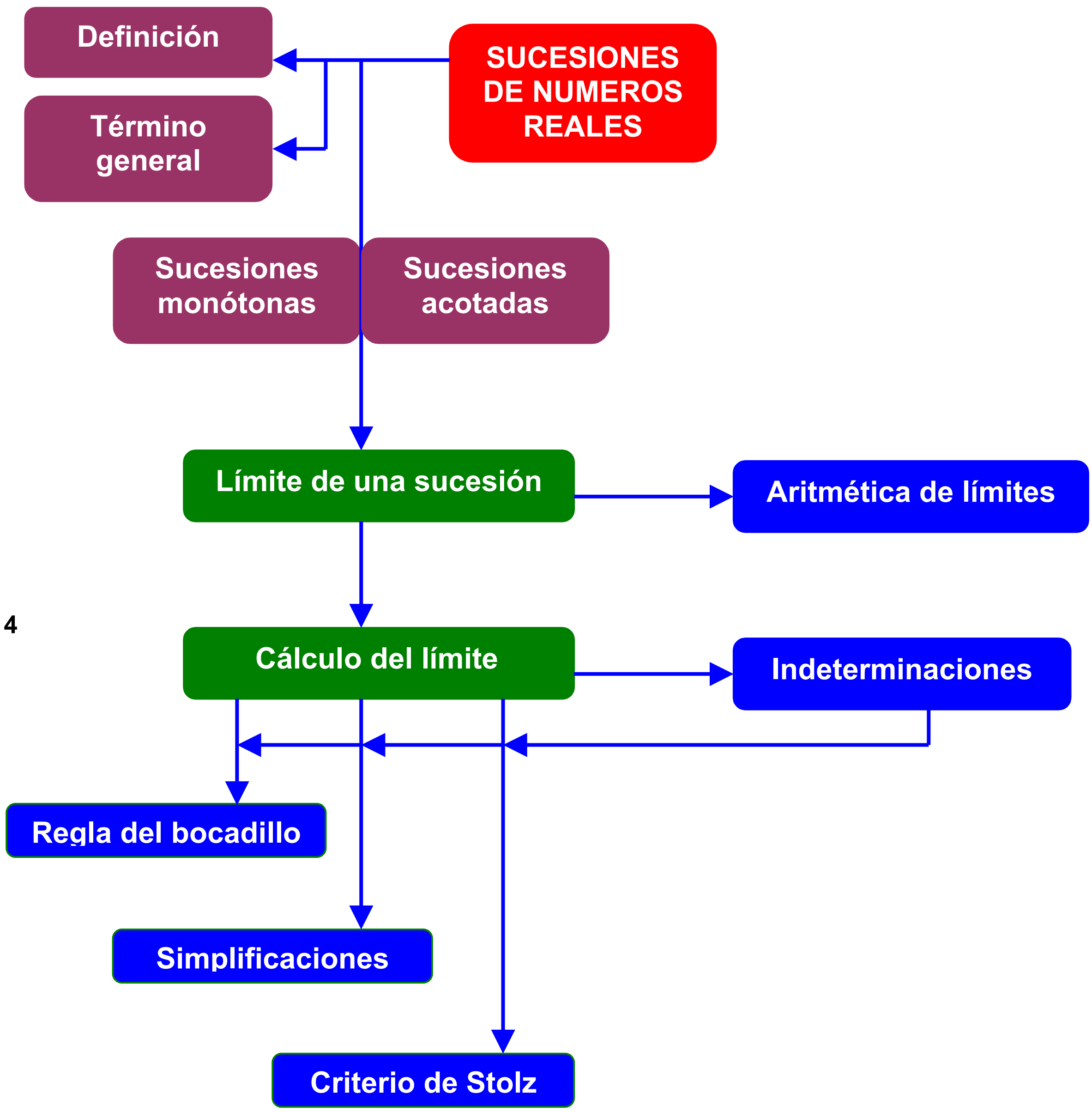
SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Autor: Patrici Molinàs Mata (pmolinas@uoc.edu), José Francisco Martínez Boscá (jmartinezbos@uoc.edu)

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En este Mathblock introducimos el concepto de sucesión de números reales. Se trata de una aplicación de los números naturales, un conjunto infinito, pero discreto, en los números reales. Este tipo de aplicaciones son inyectivas puesto que existe una cantidad infinita y densa de números reales y sólo una cantidad infinita pero discreta de naturales. Este Mathblock versa sobre los tipos de sucesiones, el concepto de límite de una sucesión y los métodos de cálculo analíticos y con el Mathcad que conducen a la determinación del límite de sucesiones convergentes. Este Mathblock es la base para comprender satisfactoriamente los Mathblocks “Series de números reales positivos” y “Series de potencias”. Por lo tanto, asimilarlo detenidamente es de fundamental importancia.

Averiguar si una serie es **monótona**, si está **acotada** y si existe el **límite** de dicha sucesión es uno de los objetivos de la primera parte de este Mathblock. Todas las sucesiones con límite saatisfacen determinadas operaciones que expondremos aquí en detalle. La parte central de este Mathblock consiste en desarrollar una habilidad de cálculo suficiente para poder determinar el límite en las llamadas situaciones de **indeterminación**. En ellas debemos ser capaces de utilizar **simplificaciones**, **la regla del bocadillo**, **el criterio de Stolz** y otras técnicas para desenmarcarar la indeterminación y averiguar el valor del límite.

OBJETIVOS DOCENTES

- Introducir el concepto de sucesión de números reales. Saber comprobar si una sucesión es acotada y monótona. Introducir el concepto de límite de una sucesión.

- Conocer las propiedades fundamentales del límite de una sucesión así como introducir la aritmética de los límites.

- Distinguir los casos de indeterminaciones en el cálculo de límites y resolver casos concretos, utilizando los criterios adecuados (criterio de Stolz, regla del bocadillo, etc).

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Previamente a la lectura de este Mathblock es muy aconsejable que se tenga un conocimiento mínimo del programa Mathcad.

Por lo tanto, recomendamos que trabajéis el Mathblock “Uso básico del Mathcad en Análisis (I): cálculo simbólico y analítico” antes de empezar con éste.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- **Sucesión de números reales**

En el lenguaje corriente las palabras “serie” y “sucesión” son sinónimas y se utilizan para designar un conjunto de cosas o sucesos dispuestos en un orden. En Matemáticas, estas palabras tienen un significado técnico especial. La palabra “sucesión” tiene un sentido análogo al del lenguaje corriente, pues con ella se quiere indicar un conjunto de objetos puestos en orden, pero la palabra “serie” se usa en un sentido completamente distinto. Aquí se estudiará el concepto de sucesión dejando el de serie para definirlo más tarde en el Mathblock “Series de números reales”.

Si a cada entero positivo n está asociado un número real a_n, entonces se dice que el conjunto ordenado:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

define una sucesión infinita. Cada término de la sucesión tiene asignado un entero positivo, de manera que se puede hablar del primer término a_1, del segundo término a_2 y en general del término n-ésimo a_n. Cada término a_n tiene un siguiente a_{n-1} y por tanto no hay un "último término".

Los ejemplos más corrientes de sucesiones se pueden construir dando alguna regla o fórmula que defina el término n-ésimo. Así, por ejemplo, la fórmula $a_n = 1/n$ define la sucesión cuyos cinco primeros términos son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

Podemos definir de manera más formal una **sucesión de números reales** como una aplicación h de los números naturales ***N*** en el conjunto ***R*** de los números reales: $h : N \to R$, $n \to h(n) = x_n$. La imagen de n recible en nombre de **término n-ésimo** o **término general** de la sucesión. Podemos también definir una sucesión de números reales como aquella función f cuyo dominio es el conjunto infinito de todos los enteros positivos $1,2,3,4,5,\ldots$. El valor $f(n)$ de la función se denomina el término n-ésimo de la sucesión.

De alguna forma hemos readaptado el concepto de función continua, donde hemos fijado el dominio de la función como el conjunto de los naturales, ***N***. En lo que sigue, diremos que dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son iguales si $x_n = y_n$ para todo $n \in N$.

- ### Sucesión acotada

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que está **acotada** si existe un número positivo K tal que $|a_n| \leq K$ para todo n. Entonces, K es una cota de la sucesión $\{a_n\}$.

Vemos, como ejemplo, que la sucesión mencionada anteriormente $a_n = 1/n$ está acotada. Basta con fijarse que para $n \geq 1$, $1 \geq 1/n$. Por lo tanto, la sucesión está acotada y las cotas són todos los números reales mayores o iguales a la unidad.

Una sucesión es **no acotada** si para cualquier valor G, arbitariamente grande, existe un número natural n tal que $|a_n| > G$.

Como ejemplo de sucesión no acotada, proporcionamos aquí $a_n = (n^2+1)/n$. Tenemos que probar que dado un valor G arbitrariamente grande, entonces existe un valor de n tal que $|a_n| > G$. Para ello, nos debemos fijar en que para cualquier G es posible encontrar un n tal que: $a_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} > G$ puesto que n puede hacerse arbitrariamente grande.

- **Sucesión monótona**

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es **creciente** si para todo número natural n se verifica que $a_{n+1} \geq a_n$. Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que es **decreciente** si para todo número natural n se verifica que $a_{n+1} \leq a_n$. Una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

Nos proponemos ahora demostrar que la sucesión con término general: $a_n = \frac{n}{n+1}$ es monótona creciente. Si queremos comprobar que la sucesión es monótona creciente, tenemos que demostrar que $a_n \leq a_{n+1}$. Veámoslo:

$$a_n \overset{?}{\leq} a_{n+1}$$

substituyendo:

$$\frac{n}{n+1} \overset{?}{\leq} \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

simplificando:

$$\frac{n}{n+1} \overset{?}{\leq} \frac{n+1}{n+2}$$

multiplicando en cruz:

$$n(n+2) \overset{?}{\leq} (n+1)^2$$

desarrollando:

$$n^2 + n \overset{?}{\leq} n^2 + 2n + 1$$

obtenemos finalmente:

$$0 \overset{?}{\leq} 1$$

que es una desigualdad cierta y, por lo tanto, todas las anteriores también lo son y, en particular, la primera. Acabamos, pues de demostrar que la sucesión considerada es monótona creciente.

- **Límite de una sucesión**

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene limite l si, para cada número positivo ε, existe otro número positivo N (que en general depende de ε) tal que

$$|a_n - l| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad n \geq N.$$

En este caso, decimos que la sucesión a_n converge hacia l y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \qquad \text{o que} \qquad a_n \to l \text{ cuando } n \to \infty$$

Una sucesión que no converge, puede divergir cuando no esté acotada inferiormente o superiormente o oscilar cuando su valor varie entre dos o más valores fijos para $n \to \infty$.

- **Convergencia de sucesiones monótonas**

Es cómodo trabajar con sucesiones monótonas pues su convergencia o divergencia se puede determinar fácilmente. En efecto, existe el siguiente criterio. Una sucesión monótona converge si y sólo si está acotada.

- **Aritmética de los límites**

A continuación vemos una serie de resultados que nos permiten calcular límites sin utilizar la definición. Supongamos las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que sus límites existen, es decir, que existen dos números reales tales que: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, entonces:

1. Para cualquier número real λ, $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda A$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$
4. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$
5. Si $B \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$
6. $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B$

- **Sucesiones divergentes**

Una sucesión $\{a_n\}$ tiende a ∞ si para todo número real $G > 0$ existe un entero N tal que $\forall n > N$; $a_n > G$. Lo denotaremos —en un abuso de lenguaje matemático— como $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. De forma semejante, una sucesión $\{b_n\}$ tiende a $-\infty$ si para todo número real $G > 0$ existe un entero N tal que $\forall n > N$; $b_n < -G$. Lo denotaremos —en un abuso de lenguaje matemático— como $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

- **Regla del bocadillo**

A menudo la resolución de un límite requiere darse cuenta que la sucesión diverge, oscila o tiende a una valor determinado sin efectuar un cálculo explícito del límite. Este último caso corresponde a la situación que vamos a exponer seguidamente que se resuelve aplicando la **regla del bocadillo**.

Veamos en que consiste.

Supongamos que $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ son dos sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, si $a_n \le b_n \le c_n \quad \forall n > n_0$; entonces b_n es también convergente y su límite equivale al de $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$: $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

Estudiemos el siguiente ejemplo. Supongamos la sucesión:

$$a_n = \frac{\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n}{n^2}$$

Construyamos dos sucesiones, una mayor y una menor que $\{a_n\}$ de la siguiente forma:

$$n \cdot \left[\min\left\{ \frac{\cos 1}{n^2}, \frac{\cos 2}{n^2}, \cdots, \frac{\cos n}{n^2} \right\} \right] \le \frac{\cos 1}{n^2} + \frac{\cos 2}{n^2} + \ldots + \frac{\cos n}{n^2} \le n \cdot \left[\max\left\{ \frac{\cos 1}{n^2}, \frac{\cos 2}{n^2}, \cdots, \frac{\cos n}{n^2} \right\} \right]$$

$$n \cdot \left(\frac{-1}{n^2} \right) \le \frac{\cos 1}{n^2} + \frac{\cos 2}{n^2} + \ldots + \frac{\cos n}{n^2} \le n \cdot \frac{1}{n^2}$$

Hacemos un paso en el límite y tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \left(\frac{-1}{n^2} \right) \right] \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos 1}{n^2} + \frac{\cos 2}{n^2} + \ldots + \frac{\cos n}{n^2} \right) \le \lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \frac{1}{n^2} \right]$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos 1}{n^2} + \frac{\cos 2}{n^2} + \ldots + \frac{\cos n}{n^2} \right) \le 0$$

Por la regla del bocadillo tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos 1}{n^2} + \frac{\cos 2}{n^2} + \ldots + \frac{\cos n}{n^2} \right) = 0$$

- **Simplificaciones: sucesión acotada por sucesión de límite nulo**

Enunciemos la siguiente consecuencia de la regla del bocadillo. Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión **convergente** tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ es una sucesión **acotada** (no necesariamente convergente), entonces la sucesión $\{a_n \cdot b_n\}$ es **convergente** y $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Pongamos un ejemplo, supongamos que queremos calcular el límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión $\frac{\sin n}{n}$. Para ello podemos observar que la sucesión puede entenderse como el productor de dos sucesiones: $\frac{1}{n}$ y $\sin n$. Entonces como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ y $\sin n$ está acotada por 1, podemos asegurar que $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

- **Indeterminaciones**

Las fórmulas de la aritmética de los límites que hemos visto anteriormente nos conducen, en algunos casos, a expresiones indeterminadas, es decir cuyo valor no es evidente y que señalamos, de forma simbólica, de la siguiente forma: $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty\cdot 0$, ∞^0, 0^0 y 1^∞.

No existen reglas generales que nos permitan resolver los límites indeterminados; no obstante, se pueden dar algunas indicaciones como presentamos en la parte práctica de este Mathblock.

- **Criterio de Stolz**

El siguiente criterio, que recibe el nombre de **criterio de Stolz**, resulta especialmente útil para determinar el límite de sucesiones en las que aparecen sumas de términos que se incrementan con n.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones donde $\{b_n\}$ es monótona creciente o decreciente y $b_n \neq 0$ para $\forall n \in N$ tales que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

Si existe $\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \in R$ entonces tenemos que $\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lambda$

Ilustremos el criterio de Stolz con un ejemplo. Calculemos $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$, vemos que $\{n^3\}$ es creciente y que $\lim_{n\to\infty} n^3=\infty$ y, por tanto, podemos aplicar el criterio de Stolz. Dado que el $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ existe:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2-\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)}{(n+1)^3-n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2+3n+1}=\frac{1}{3}$$

Éste es igual al límite buscado:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$$

CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

- **Cálculo de límites que presentan indeterminación**

Averigüemos a qué valor tienden en el infinito las siguientes sucesiones después de haber determinado el tipo de indeterminación:

a) $2\ln(3n)-\ln(n^2+1)$ *b)* $\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^n$

c) $\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$ *d)* $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$

En la sucesión d) utilizaremos la aproximación de Stirling, $n!\approx\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$, que relaciona dos infinitos equivalentes. Al final comprobaremos los límites con Mathcad.

a) Se trata de una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Utilicemos las propiedades de los logaritmos para conseguir reducir la expresión al logaritmo de un cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\ln(3n)-\ln\left(n^2+1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln(3n)^2-\ln\left(n^2+1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{9n^2}{n^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{9}{1+1/n^2}\right)=\ln 9=2\ln 3$$

Verificamos este resultado con Mathcad utilizando la instrucción de simplificación *View > Toolbars > Symbolic > Symbolic Evaluation.*	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\ln(3n)-\ln\left(n^2+1\right)\right)\to 2\cdot\ln(3)$

b) Demostraremos que esta indeterminación es del tipo 1^∞. Basta para ello, probar que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ tiende a cero cuando *n* tiende a infinito. Multipliquemos y dividamos por el conjugado para desbarazarnos de la indeterminación $\infty-\infty$ en raíces.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\right)=0$$

Resolvamos, pues, esta indeterminación del tipo 1^∞ intentando construir el número *e* que equivale al límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{s_n}\right)^{s_n}=e$$

donde s_n es cualquier sucesión con $\underset{n\to\infty}{lím}(s_n)=\infty$. En primer lugar expresemos la resta de raíces como un cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}}=e^{\frac{1}{1+1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Verifiquemos este resultado con Mathcad utilizando la instrucción de simplificación *View > Toolbars > Symbolic > Symbolic Evaluation*	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}\to \exp\left(\frac{1}{2}\right)$

c) Estudiemos este límite analizando sus partes:

1) $\sin(n!)$ toma valores entre *–1* y *1* y no tiene límite cuando *n* tiende a ∞.

2) $\dfrac{n}{n^2+1}$ tiene a cero puesto que el exponente del término de mayor grado del denominador supera al del numerador una unidad.

Entonces podemos, sin realizar más cálculos, afirmar que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(n!)}{n^2+1}=0$$

porque el producto de una sucesión que tiende a cero con otra que tiende a un valor finito, o oscila entre dos valores finitos, es cero.

Verifiquemos este resultado con Mathcad utilizando la instrucción de simplificación *View > Toolbars > Symbolic > Symbolic Evaluation.*	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot\sin(n!)}{n^2+1}\right)\to 0$

d) Averigüemos el resultado de este límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} =$$

substituyendo $n!$ por $\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ (fórmula de Stirling). Podemos hacer esta substitución siempre que el término substituido esté multiplicando o dividiendo al resto de la expresión. Se substituyen infinitos equivalentes con el mismo "cuidado" que se substituyen infinitésimos equivalentes.

Con esta substitución, llegamos a:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi\, 2n}e^{-2n}(2n)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}e^{-n}(n)^n}} =$$

y, simplificando:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\sqrt{2}e^{-n}2^{2n}n^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2}e^{-n}2^{2n}n^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2}e^{-n}2^{2n}n^n}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{2}\left(\frac{4}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{e}\right)\sqrt[n]{\sqrt{2}} = \left(\frac{4}{e}\right)\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2} = \left(\frac{4}{e}\right)\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2n}} = \left(\frac{4}{e}\right)2^0 = \frac{4}{e}$$

donde hemos sacado fuera del límite la fracción *4/e,* al ser esta una constante.

Con Mathcad, utilizando la instrucción de simplificación *View > Toolbars > Symbolic > Symbolic Evaluation,* obtenemos, por supuesto, el mismo resultado.	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \to 4\cdot\exp(-1)$

Este último límite también se puede resolver mediante el criterio de Stolz, ejercicio que se propone al los lectores y lectoras de este Mathblock.

- **Cálculo de límites mediante el criterio de Stolz**

Calculemos los siguientes límites de sucesiones aplicando el criterio de Stolz:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$

Nos preguntaremos si cabe la posibilidad de efectuar el cálculo de estos límites sin utilizar el criterio de Stolz. Y comprobaremos ambos límites con Mathcad.

a) Expresando el término general de la sucesión como una única fracción:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n-1}{n^2}\right)=$$

vemos que tanto el numerador como el denominador divergen y, por tanto, podemos resolver la indeterminación ∞/∞ aplicando el criterio de Stolz:

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n-1-(1+2+3+\ldots+(n-2))}{n^2-(n-1)^2}\right)=$$

simplificando:

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-1/n}{2-1/n}\right)=\frac{1}{2}$$

También se puede resolver este límite sin utilizar el criterio de Stolz. Basta con sumar la serie aritmética en el numerador. Recordando que la suma de *n* términos de una serie aritmética, S_n^A es igual a la semisuma del primer y último término multiplicada por el número de términos, es decir:

$$S_n^A=\frac{(a_1+a_n)}{2}n$$

podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n-1}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot(n-1)/2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$$

Recuperando el valor del límite que habíamos obtenido aplicando el criterio de Stolz.

Verifiquemos este resultado con Mathcad utilizando la instrucción de simplificación *View > Toolbars > Symbolic > Symbolic Evaluation.*	$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n-1} j}{n^2}\to\frac{1}{2}=0.5$

b) Si tomamos común denominador, conseguiremos expresar la sucesión como el cociente entre una suma de términos dividida por una potencia. Veámoslo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1}{2^n}\right)=$$

y, como tanto el numerador como el denominador divergen (indeterminación tipo ∞/∞), aplicamos el criterio de Stolz:

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1-\left(2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1\right)}{2^n-2^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-2^{n-1}}\right)=$$

Este límite indeterminado, se resuelve simplicando el factor común 2^{n-1}:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2-1}\right)=1$$

Resolvamos este límite sin utilizar el criterio de Stolz. Efectuemos, en primer lugar, la suma de la serie geométrica en el numerador. Dado que la suma de *n* términos de una serie geométrica, S_n^G es igual a:

$$S_n^G=\frac{a_n r-a_1}{r-1}$$

donde a_1 y a_n son el primer y último términos de la serie geométrica, podemos reescribir el límite como:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1}{2^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(2^{n-1}2-1\right)/\left(2-1\right)}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)=1$$

Recuperando el valor del límite que habíamos obtenido aplicando el criterio de Stolz.

Verifiquemos este resultado con Mathcad utilizando la instrucción de simplificación *View > Toolbars > Symbolic > Symbolic Evaluation.*	$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n-1}2^j}{2^n}\to 1=1$

CONCLUSIONES

Hemos visto algunos tipos de sucesiones de números reales que existen. Entre las sucesiones de números reales monótonas, aquellas que son acotadas, convergen. Es decir, existe un número real al que se acercan los valores de la sucesión al aumentar el índice de término. El cálculo de límites supone utilizar diversos tipos de técnicas para conseguir determinar su valor que a menudo, no es trivial de determinar debido a las indeterminaciones que existen.

Para eliminarlas hemos trabajado con la regla del bocadillo, simplificaciones basadas en esta regla así como el criterio de Stolz. Con Mathcad y en lenguaje simbólico, hemos mostrado con qué facilidad se pueden generar las soluciones a los límites buscados y comparar los resultados con los obtenidos analíticamente.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. Bernat Pané, corrección P.Molinàs (2001), “Sucesiones y series”, Ediuoc, Barcelona, p. 9-29.

[2] T. Apostol, (1979); “Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal”, Vol.1, Reverté, Barcelona, p. 457-467.

[3] R. Calm, N. Coll, y M.R. Estela (1992): “Problemas de cálculo”, Micromar, Barcelona, p. 20-36.

[4] R. Courant and F. John (1976): “Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático”, Limusa, México, p. 79-140.

[5] R.G. Bartle and D.R. Sherbert (1990): “Introducción al Análisis Matemático de una Variable,”, Limusa, México, p. 31-41.

[6] M. Ross (1980): “Elementary Analysis: The Theory of Calculus”, Springer, Berlin, p. 31-48.

[7] M. Spivak (1990): “Calculus. Cálculo Infinitesimal”, Reverté, Barcelona, p. 33-40.

[8] T.M. Apostol (1979): “Análisis Matemático”, Reverté, Barcelona, p. 223-225.

ENLACES

[W1] http://www.satd.uma.es/a_valverde/aula-calculo/calculo.html
Excelente aula virtual con apuntes muy completos de sucesiones de números reales.

[W2] http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/sucesiones/default.htm
El sitio de los estudiantes y los docentes universitarios. Es una recopilación de apuntes, con ejemplos, sobre sucesiones convergentes, acotadas, infinitésimos, límites de sucesiones, propiedades de los límites de sucesiones, cálculo de límites y límites indeterminados.

[W3] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/apuntes/
Apuntes muy completos sobre sucesiones, tipos de sucesiones y cálculo del límites.

[W4] http://www.unizar.es/analisis_matematico/analisis1/problemas/
Problemas y ejercicios de sucesiones.

[W5] http://www.monografias.com/trabajos11/traaprox/traaprox.shtml#termposit
Monografía sobre aproximaciones polinomiales, sucesiones y series.

[W6] http://www.math-atlas.org
Contiene un módulo sobre “Sucesiones, series y sumabilidad” (en inglés).

[W7] http://www.math.gatech.edu/~cain/notes/cal10.pdf
Contiene apuntes muy pedagógicos sobre sucesiones y series (en inglés).