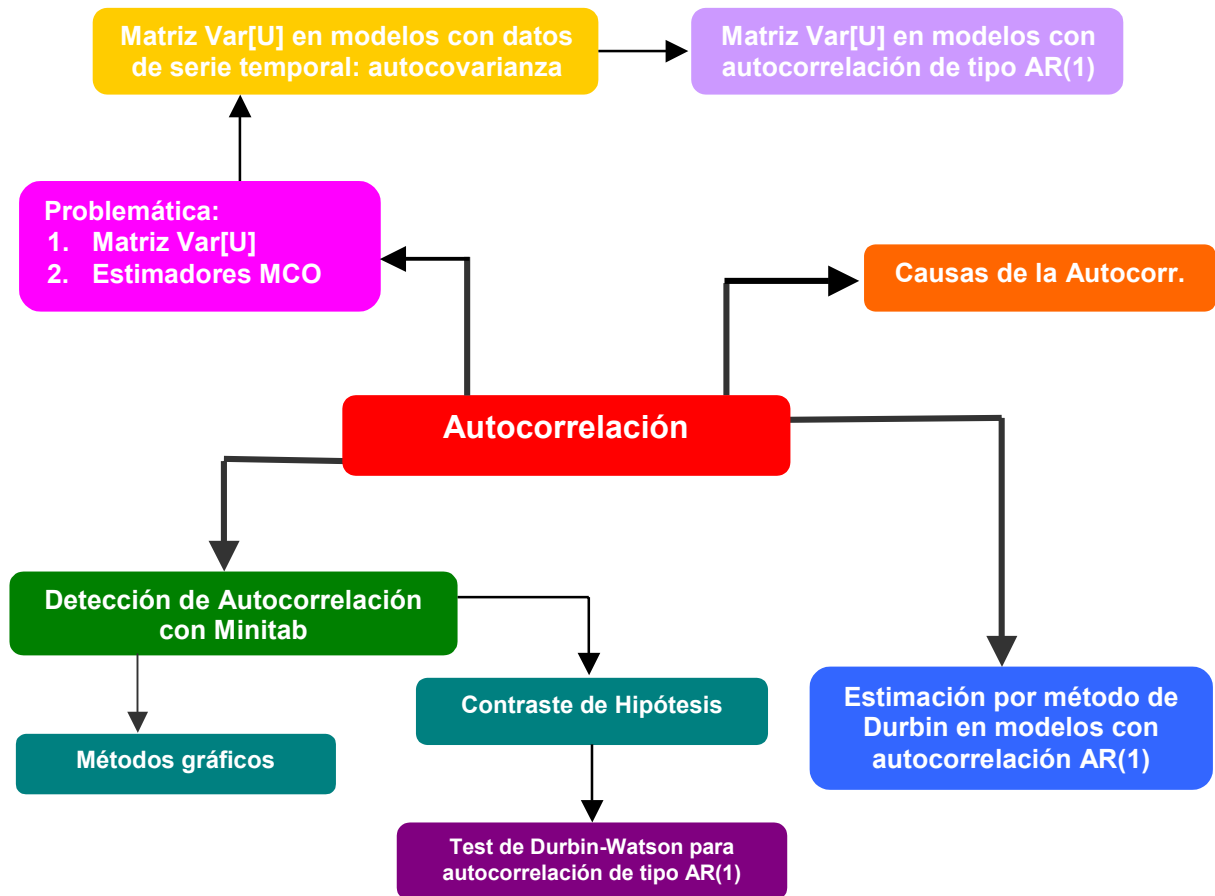


AUTOCORRELACIÓN

Autores: Ángel Alejandro Juan Pérez (ajuanp@uoc.edu), Renatas Kizys (rkizys@uoc.edu), Luis María Manzanedo Del Hoyo (lmanzanedo@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

En el *math-block* **Introducción al MRLG** vimos qué ocurría cuando fallaban las hipótesis de esfericidad en el término de perturbación. Nos centraremos ahora en la hipótesis de no autocovarianza (el supuesto de que los términos de perturbación del modelo no están correlacionados), y supondremos que el resto de las hipótesis de esfericidad sí se cumplen.

En este *math-block* aprenderemos a detectar la presencia de autocorrelación (términos de perturbación correlacionados) en el modelo, analizaremos algunas de sus posibles causas, y mostraremos cómo es posible resolver dicha problemática a fin de obtener estimadores de calidad.

OBJETIVOS

- Entender en qué consiste el problema de la autocorrelación y cómo afecta éste a la matriz de varianzas y covarianzas y a los estimadores MCO.
- Conocer las causas que pueden provocar el incumplimiento de la hipótesis de autocorrelación.
- Analizar el problema de la autocorrelación en modelos con datos de corte longitudinal (serie temporal), y comprender los conceptos de autocovarianza y coef. de autocorrelación simple.
- Estudiar el problema de la autocorrelación de tipo AR(1).
- Aprender a detectar, con ayuda de Minitab, la presencia de autocorrelación en un modelo, tanto por medios gráficos como a través de contrastes de hipótesis.
- Saber resolver el problema de la autocorrelación de tipo AR(1) mediante el método de Durbin.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Aparte de estar iniciado en el uso de Excel y del paquete estadístico Minitab, resulta muy conveniente haber leído con profundidad los siguientes *math-blocks*:

- Regresión Lineal Múltiple
- Introducción al MRLG

CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y CASOS PRÁCTICOS CON SOFTWARE

□ El problema de la Autocorrelación

Como se comentó en el *math-block* **Introducción al MRLG**, cuando se utiliza el modelo de regresión lineal múltiple (donde usamos la notación $X_1 = 1$ para la “variable” que acompaña al término independiente):

$$Y = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \dots + \beta_k \cdot X_k + u$$

resulta habitual suponer que no existe correlación entre los términos de perturbación (hipótesis de **no autocorrelación**), i.e.:

$$\sigma_{ij} = Cov[u_i, u_j] = Cov[u_j, u_i] = \sigma_{ji} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Por lo que a la matriz de varianzas y covarianzas del término de perturbación se refiere, esta hipótesis se traduce en el hecho de que VAR[U] será una matriz diagonal (todos los términos externos a la diagonal principal serán ceros):

$$Var[U] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \end{bmatrix}$$

Cuando no se cumpla la hipótesis anterior, diremos que el modelo presenta problemas de **autocorrelación** o **correlación serial**. En tal caso, existirá correlación entre dos o más términos de perturbación, por lo que la matriz de varianzas y covarianzas asociada ya no será diagonal (existirán elementos no nulos fuera de la diagonal principal).

En presencia de autocorrelación, y suponiendo que sí se cumple la hipótesis de Heteroscedasticidad, (i.e.: que la varianza del término de perturbación es constante), la matriz de varianzas y covarianzas del término de perturbación será una matriz simétrica de la forma:

$$Var[U] = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sigma_{12}}{\sigma^2} & \dots & \frac{\sigma_{1n}}{\sigma^2} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sigma^2} & 1 & \dots & \frac{\sigma_{2n}}{\sigma^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sigma_{n1}}{\sigma^2} & \frac{\sigma_{n2}}{\sigma^2} & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \cdot \Omega_n$$

donde $Var[u_i] = \sigma^2$ y n es el número de observaciones disponible.

En tales condiciones, el estimador MCO de \mathbf{B} es insesgado y consistente, pero no es eficiente (es decir, ya no será el de mínima varianza, por lo que si usamos el estimador MCO en lugar del eficiente para hallar intervalos de confianza estaremos perdiendo precisión ya que obtendremos intervalos más grandes de los que proporcionaría el estimador eficiente). Además, el estimador de la varianza del término de perturbación, $\hat{\sigma}_u^2$, será sesgado.

□ Aplicación del MCG para modelos con Autocorrelación

Como acabamos de ver, cuando el modelo presente problemas de autocorrelación, el método MCO no nos proporciona buenos estimadores, y será necesario recurrir al método de **mínimos cuadrados ponderados** o **generalizado** (MCG) para obtener estimadores de calidad:

$$\hat{B}_{MCG} = (X' \cdot \Omega^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot (X' \cdot \Omega^{-1} \cdot Y)$$

Por tanto, resulta imprescindible conocer la matriz Ω^{-1} (la inversa, salvo factor escalar, de la matriz de varianzas y covarianzas del término de perturbación) o, alternativamente, la matriz $T = P^{-1}$ tal que $\Omega = P \cdot P'$ (recordemos que otra opción alternativa para hallar los estimadores MCG es aplicar MCO sobre el modelo transformado mediante T).

Sin embargo, en el caso de autocorrelación en general, no resulta fácil conocer la forma concreta de las matrices T y Ω^{-1} . En este *math-block* nos limitaremos pues a estudiar la forma de dichas matrices para un tipo frecuente de autocorrelación, el que aparece en modelos de regresión con datos de corte longitudinal (serie temporal). Más concretamente, analizaremos la forma que adquieren dichas matrices en los llamados esquemas autorregresivos de orden 1 o AR(1). Asimismo, presentaremos una variante del método MCG (el llamado método de Durbin) que nos facilitará la estimación de los coeficientes \mathbf{B} en modelos con esquema de autocorrelación de tipo AR(1).

□ **Causas de la Autocorrelación**

- **Trabajo con datos de serie temporal:** cuando se trabaja con datos de corte longitudinal (p.e.: una variable explicativa cuyas observaciones correspondan a valores obtenidos en instantes temporales sucesivos), resulta bastante frecuente que el término de perturbación en un instante dado siga una tendencia marcada por los términos de perturbación asociados a instantes anteriores. Este hecho da lugar a la aparición de autocorrelación en el modelo.
- **Especificación errónea en la parte determinista del modelo (autocorrelación espuria):** en este apartado, cabe distinguir dos situaciones:
 1. Omisión de variables relevantes: en tal caso, las variables omitidas pasan a formar parte del término de error y, por tanto, si hay correlación entre distintas observaciones de las variables omitidas, también la habrá entre distintos valores de los términos de perturbación.
 2. Especificación incorrecta de la forma funcional del modelo: si usamos un modelo inadecuado para describir las observaciones (p.e.: un modelo lineal cuando en realidad se debería usar un modelo cuadrático), notaremos que los residuos muestran comportamientos no aleatorios (i.e.: están correlacionados).
- **Transformaciones de los datos:** determinadas transformaciones del modelo original podrían causar la aparición de autocorrelación en el término de perturbación del modelo transformado (incluso cuando el modelo original no presentase problemas de autocorrelación).
- **Trabajo con modelos dinámicos:** cuando se trabaja con series temporales suele ser habitual considerar modelos de regresión que incluyan no sólo los valores actuales sino también los valores retardados (pasados) de las variables explicativas. Es el caso de un **modelo de retardos distribuidos de orden s** o **RD(s)**:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \dots + \beta_s X_{t-s} + u_t$$

Otro tipo de modelo dinámico que presentaría problemas de autocorrelación sería aquel que incluyese entre sus variables explicativas uno o más valores retardados de la variable dependiente. Este otro tipo de modelo dinámico se conoce como **modelo autorregresivo de orden s** o **AR(s)**:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \gamma_1 Y_{t-1} + \dots + \gamma_s Y_{t-s} + u_t$$

□ **Matriz VAR[U] en modelos de regresión con datos de corte longitudinal**

Como hemos visto, una de las situaciones en que con más frecuencia suelen aparecer problemas de autocorrelación es cuando se trabaja con modelos de regresión lineal que hacen uso de datos de corte longitudinal (serie temporal). En estos casos, no hablaremos de covarianza entre los términos de perturbación u_i y u_j , sino de covarianza entre los términos u_t y u_{t-s} , o **autocovarianza de orden s**, γ_s , donde u_{t-s} es el término de perturbación asociado al instante temporal t-s:

$$\text{Autocovarianza de orden s} = \gamma_s = \text{Cov}[u_t, u_{t-s}]$$

(Observar que $\gamma_0 = \text{Cov}[u_t, u_t] = \text{Var}[u_t, u_t] = \sigma^2$)

La autocovarianza cumple una serie de propiedades interesantes:

1. Es simétrica respecto de s, i.e.: $\gamma_s = \text{Cov}[u_t, u_{t-s}] = \text{Cov}[u_t, u_{t+s}] = \gamma_{-s}$
2. Sólo depende del número de períodos temporales (s) que hay entre los dos términos de perturbación implicados, i.e.: $\gamma_s = \text{Cov}[u_t, u_{t-s}] = \text{Cov}[u_{t^*}, u_{t^*-s}] \quad \forall t, t^*$
3. En valor absoluto, es siempre menor o igual que la varianza, i.e.: $|\gamma_s| \leq \gamma_0 = \sigma^2 \quad \forall s$

Al conjunto formado por todas las autocovarianzas $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1}\}$ se le denomina **función de autocovarianzas** (donde n es el número de observaciones).

Usando el concepto de autocovarianza y las propiedades anteriores, la matriz de varianzas y covarianzas del término de perturbación puede escribirse como:

$$\text{Var}[U] = \sigma^2 \cdot \Omega_n = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & \gamma_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \dots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

En la expresión anterior, podemos sacar como factor común el término $\gamma_0 = \sigma^2$, con lo que quedaría:

$$\text{Var}[U] = \sigma^2 \cdot \Omega_n = \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$ es el llamado **coeficiente de autocorrelación simple**, ρ_s .

El coeficiente de autocorrelación simple no es más que un coeficiente de correlación, por lo que su valor siempre estará comprendido entre -1 y 1 (toma el valor 1 para s = 0).

Al conjunto formado por todos los coeficientes de autocorrelación simple $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-1}\}$ se le denomina **función de autocorrelación simple** o **ACF**.

□ **Matriz VAR[U] en modelos con esquema de autocorrelación AR(1)**

Acabamos de ver que, cuando se trabaja con modelos de regresión lineal de corte longitudinal (serie temporal), la matriz de varianzas y covarianzas del término de perturbación viene determinada por los coeficientes de autocorrelación simple ($\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-1}$). El problema es que dichos coeficientes son valores desconocidos a priori, por lo que -a fin de simplificar aún más la expresión de la matriz Ω - es necesario recurrir a algún supuesto adicional sobre el tipo de autocorrelación que siguen los términos de perturbación.

En general se usan tres supuestos o **esquemas de autocorrelación**: el **esquema autorregresivo (AR)**, el **esquema de media móvil (MA)**, y el **esquema mixto (ARMA)**. Nosotros nos centraremos en el primero de ellos.

Así, dado el modelo de regresión lineal (con datos de corte longitudinal) siguiente:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \dots + \beta_k \cdot X_k + u$$

diremos que el término de perturbación asociado al instante t , (u_t) sigue un **esquema autorregresivo de orden 1, AR(1)**, si es una combinación lineal del término anterior (u_{t-1}) y de un término de error (ε_t) que verifica los supuestos de esfericidad del MRLM (ruido blanco):

$$u_t = \phi \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Se puede demostrar que, cuando el término de perturbación sigue un esquema AR(1) con coeficiente ϕ , se cumple lo siguiente:

1. La varianza del término de perturbación es: $Var[u] = \sigma^2 = \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$
(donde σ_ε^2 es la varianza del término de error ε_t).
2. Los coeficientes de autocorrelación simple son: $p_1 = \phi, p_2 = \phi^2, \dots, p_s = \phi^s$

Así pues, en un modelo con esquema de autocorrelación AR(1), la matriz de varianzas y covarianzas del término de perturbación sólo dependerá de los parámetros σ_ε^2 y ϕ :

$$Var[U] = \sigma^2 \cdot \Omega = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \begin{bmatrix} 1 & \phi & \phi^2 & \dots & \phi^{n-1} \\ \phi & 1 & \phi & \dots & \phi^{n-2} \\ \phi^2 & \phi & 1 & \dots & \phi^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi^{n-1} & \phi^{n-2} & \phi^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

En concreto, las matrices que nos interesan para aplicar MCG (en cualquiera de sus dos versiones) vendrán dadas por:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\phi^2} \begin{bmatrix} 1 & -\phi & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\phi & 1+\phi^2 & -\phi & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\phi & 1+\phi^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\phi^2 & -\phi \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\phi & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\phi^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\phi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\phi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\phi & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, conviene observar lo siguiente:

1. Dado que $|\phi| = |\rho_1| < 1$, los coeficientes de autocorrelación simple forman una sucesión decreciente en módulo (i.e.: $|\rho_1| = |\phi| > |\rho_2| = |\phi^2| > \dots > |\rho_s| = |\phi^s| > 0$).
2. Si $0 < \phi < 1$, los valores $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ serán siempre positivos. Por el contrario, si $-1 < \phi < 0$, los valores $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ irán alternando su signo, comenzando por negativo.

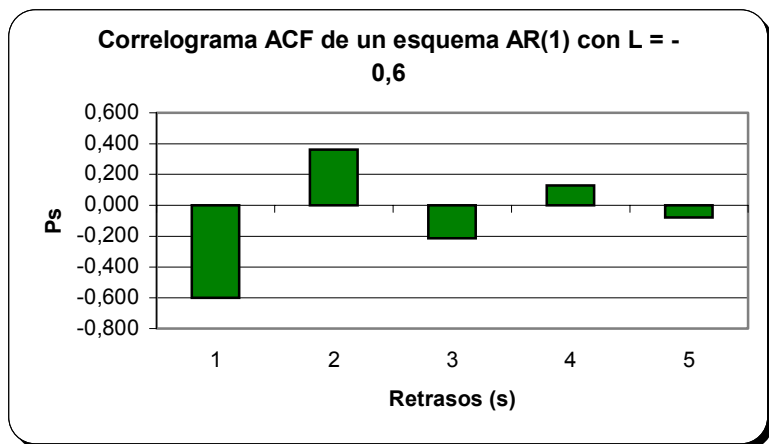
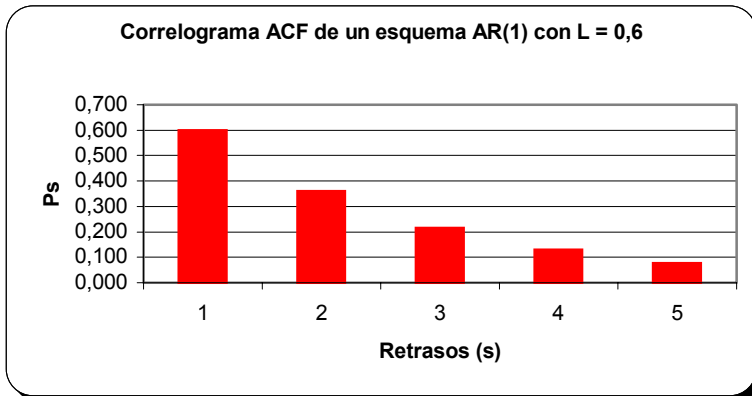
Ejemplo: Supongamos que hemos estimado por MCO, y basándonos en $n = 6$ observaciones, los coeficientes de un MRLM. Tras realizar un análisis, descubrimos que el término de perturbación del modelo presenta un esquema de autocorrelación de tipo AR(1). Sabemos además que $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ y que $|\phi| = 0,6$. En estas condiciones, usaremos Excel para hallar la forma exacta de la matriz $\text{Var}[U]$, así como un gráfico donde se muestre la función de autocorrelación simple o ACF:

Teniendo en cuenta que $p_s = \phi^s$, el cálculo de los coeficientes de autocorrelación simple resulta inmediato (observar que en la hoja de cálculo hemos realizado los cálculos para los dos posibles valores del parámetro ϕ , el cual viene denotado por L en la figura). Asimismo, también resulta inmediato el cálculo de $\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$.

	A	B	C	D	E	F	G
2		Esquema autocorrelación AR(1) ----> $U_t = L^*U_{t-1} + E_t$					
3							
4		L			Var(Et) =	2	
5	P	0,6	-0,6	L^A			
6	1	0,600	-0,600	1	n =	6	obs.
7	2	0,360	0,360	2			
8	3	0,216	-0,216	3			
9	4	0,130	0,130	4			
10	5	0,078	-0,078	5			
11							
12	Var(Et) / (1-L^A2)	3,125	3,125				

En este punto, es interesante notar que, si $\phi = 0,6$ (es decir, $\phi > 0$), los coeficientes de autocorrelación simple son decrecientes y siempre positivos. Por el contrario, si $\phi = -0,6$ (i.e.: $\phi < 0$), entonces dichos coeficientes van tomando valores negativos y positivos de forma alternada (si bien son decrecientes en módulo).

Las ideas anteriores se pueden apreciar con claridad en las gráficas ACF siguientes:



❑ Detección de Autocorrelación por métodos gráficos con Minitab

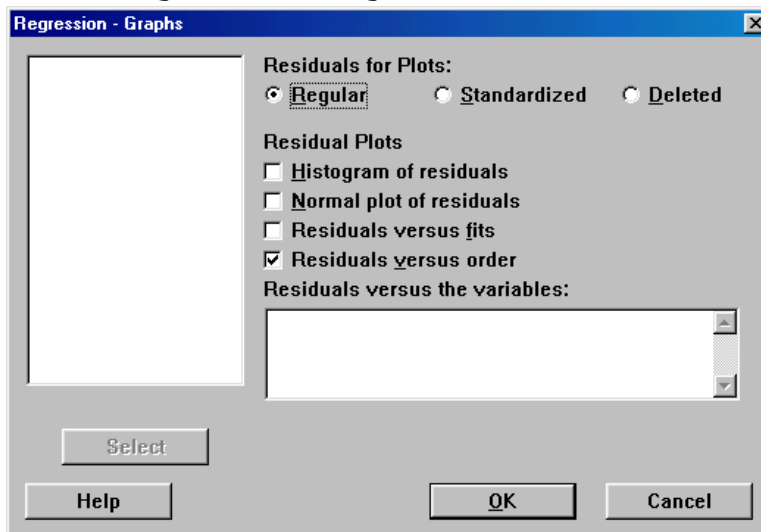
Para analizar la posible presencia de autocorrelación en el modelo se suele recurrir a dos técnicas complementarias: (1) el análisis gráfico de los residuos (obtenidos al realizar la regresión por MCO), y (2) los contrastes de hipótesis específicos (test de Durbin-Watson, test h de Durbin, test de Breusch-Godfrey, test Q de Box-Pierce, test de Ljung-Box, etc.).

Al realizar la regresión por MCO, Minitab nos ofrece la opción de representar gráficamente los residuos (o, alternativamente, los residuos estandarizados) frente al orden en que se ha registrado la observación asociada. Dado que los residuos MCO son estimadores consistentes de los términos de perturbación, si se aprecian en el gráfico anterior patrones de comportamiento sistemático (no aleatorio) podremos afirmar que los términos de perturbación presentan algún tipo de autocorrelación.

Ejemplo: En la tabla siguiente se muestran datos referidos a los niveles de importación (IM) y PIB (ambos en miles de millones de euros) pertenecientes a la economía de la zona euro durante los últimos 20 años:

Al realizar la regresión por MCO de IM sobre PIB, pediremos al programa que represente gráficamente los residuos frente al orden de la observación asociada:

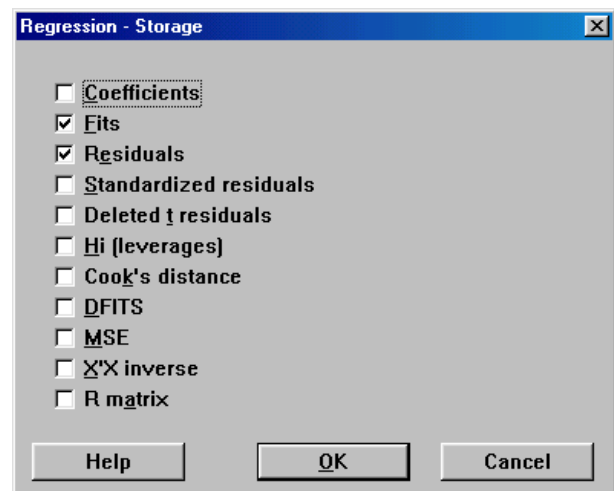
Stat > Regression > Regression:

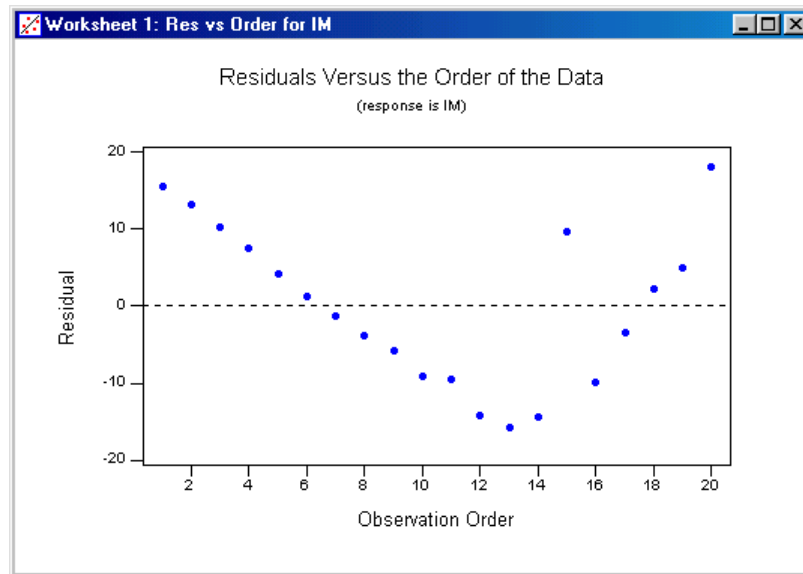


	C1	C2
↓	IM	PIB
1	23,2	506,0
2	23,1	523,3
3	25,2	563,8
4	26,4	594,7
5	28,4	635,7
6	32,0	688,1
7	37,7	753,0
8	40,6	796,3
9	47,7	868,5
10	52,9	935,5
11	58,5	982,4
12	64,0	1063,4
13	75,9	1171,1
14	94,4	1306,6
15	131,9	1412,9
16	126,9	1528,8
17	155,4	1702,2
18	185,8	1899,5
19	217,5	2127,6
20	260,9	2368,5

Además, guardaremos también los residuos y los valores ajustados para IM en sendas columnas:

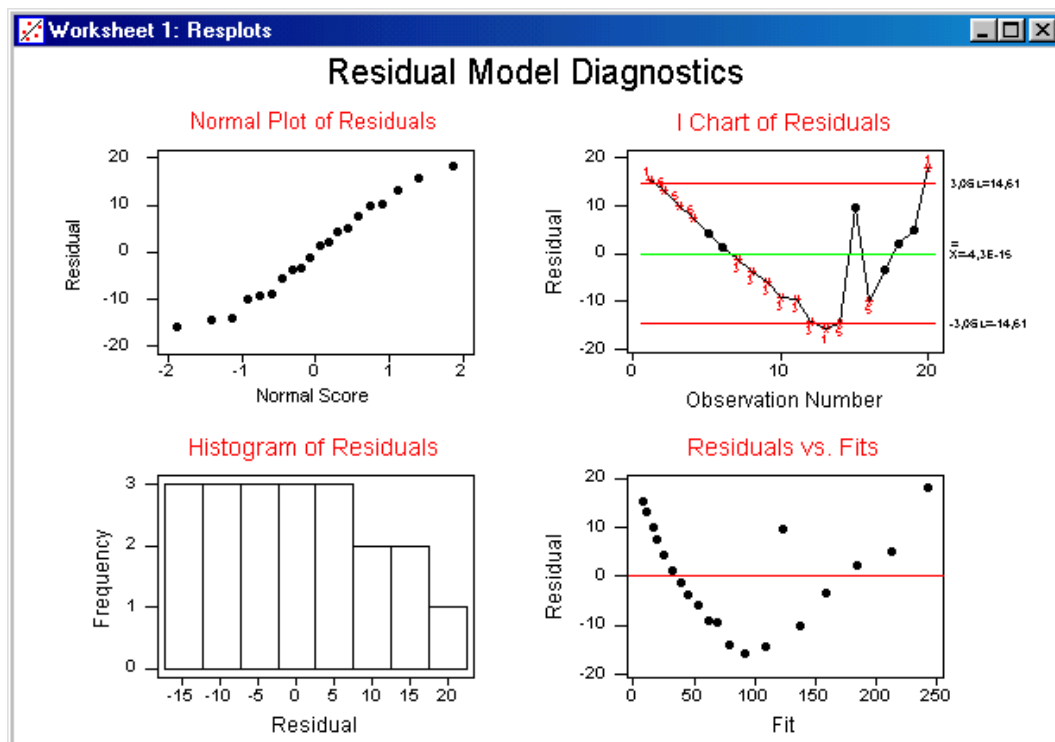
En el gráfico de residuos frente al orden de la observación se observan indicios claros de que los residuos no siguen un patrón aleatorio y, por tanto, de que el modelo presenta problemas de autocorrelación:





También es posible obtener este gráfico (junto con algunos más que nos pueden ser de utilidad a la hora de contrastar otras hipótesis de esfericidad) mediante la opción **Stat > Regression > Residual**

Plots... Usando esta opción, logramos además que Minitab realice un test de rachas y marque con asteriscos la presencia de patrones no aleatorios en los residuos:



A continuación se muestran los resultados de los tests de rachas, en los que se especifica el tipo de comportamiento sistemático detectado:

```
TEST 1. One point more than 3,00 sigmas from center line.
Test Failed at points: 1 13 20

TEST 3. 6 points in a row all increasing or all decreasing.
Test Failed at points: 7 8 9 10 11 12 13

TEST 5. 2 out of 3 points more than 2 sigmas from center line
(on one side of CL).
Test Failed at points: 2 3 13 14 16

TEST 6. 4 out of 5 points more than 1 sigma from center line
(on one side of CL).
Test Failed at points: 4 12 13 14 16

TEST 8. 8 points in a row more than 1 sigma from center line
(above and below CL).
Test Failed at points: 16
```

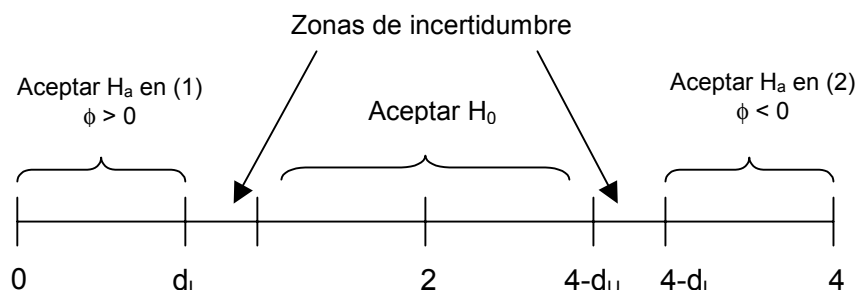
Para conocer más detalles sobre estos tests podéis consultar el *math-block* **Estadística no paramétrica** o la opción de Minitab Stats > Nonparametrics > Runs Test.

❑ **Detección de Autocorrelación mediante el test de Durbin-Watson**

Dado el modelo de regresión lineal múltiple $Y = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \dots + \beta_k \cdot X_k + u$, el **test de Durbin-Watson** permite contrastar si el término de perturbación está autocorrelacionado según un esquema AR(1), i.e., la hipótesis nula indica que si el término de perturbación es de la forma $u_t = \phi \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$ entonces necesariamente $\phi = 0$ (con lo que no habría autocorrelación según esquema AR(1)):

$$(1) \begin{cases} H_0 : u_t \approx AR(1) \text{ con } \phi = 0 \\ H_a : u_t \approx AR(1) \text{ con } \phi > 0 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad (2) \begin{cases} H_0 : u_t \approx AR(1) \text{ con } \phi = 0 \\ H_a : u_t \approx AR(1) \text{ con } \phi < 0 \end{cases}$$

El estadístico que se utiliza para realizar dicho test es el **estadístico Durbin-Watson** (el cual obtendremos con ayuda de Minitab). El estadístico DW es un valor comprendido entre 0 y 4. Como se observa en el siguiente gráfico, para valores de DW “próximos” a 2 no rechazaremos H_0 . Por el contrario, para valores de DW “alejados” de 2, sí rechazaremos H_0 (i.e., aceptaremos la existencia de autocorrelación de tipo AR(1)):



En el gráfico anterior, d_L y d_U son valores tabulados [ver web de tablas] que dependen del número de observaciones (n), del número de regresores (k), y del nivel de significación (α).

Añadir, finalmente, que si $0 < DW < 2$, el coeficiente ϕ será positivo (estaremos en el contraste unilateral (1)), mientras que si $2 < DW < 4$, dicho coeficiente ϕ será negativo (estaremos en el contraste (2)).

Una vez hallado DW, es posible usar su valor para estimar el coeficiente de autocorrelación simple ρ_1 mediante la expresión:

$$\hat{\rho}_1 \cong 1 - \frac{DW}{2}$$

Además, sabemos que en un modelo con autocorrelación AR(1), los coeficientes de autocorrelación simple vienen dados por: $p_1 = \phi$, $p_2 = \phi^2$, ..., $p_s = \phi^s$, así que una vez estimado el valor de $\rho_1 = \phi$ podremos obtener fácilmente estimaciones para los (n-1) coeficientes de autocorrelación simple y representar la correspondiente función de autocorrelación simple o ACF.

Por otra parte, hemos visto anteriormente que conocido el valor estimado de ϕ es posible construir la matriz Ω^{-1} (o, alternativamente, la matriz de transformación T) y aplicar el método MCG para hallar los estimadores del vector de coeficientes **B**.

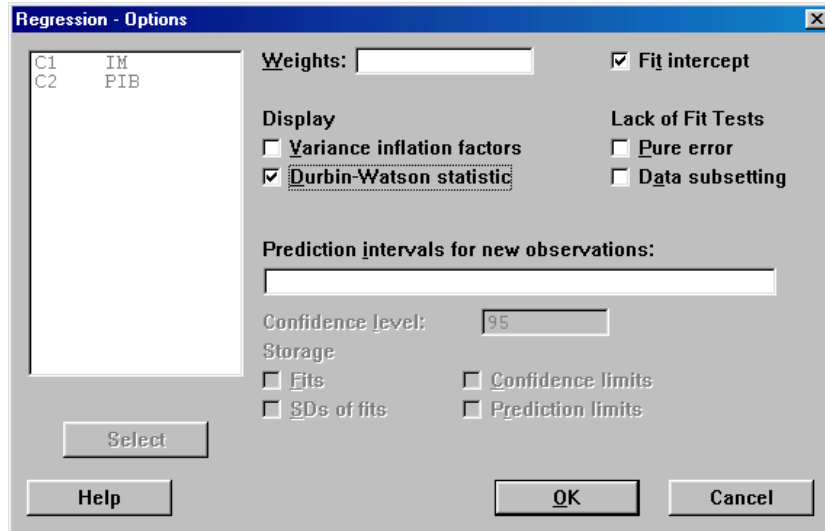
El test de Durbin-Watson presenta algunos problemas serios que cabe tener en cuenta:

- Sólo es útil para contrastar si el término de perturbación está autocorrelacionado según un esquema AR(1). El test no serviría para detectar otros tipos de autocorrelación.
- Las cotas d_L y d_U sólo son válidas si el modelo de regresión inicial contiene término independiente (que habitualmente hemos denotado por β_1).
- Presenta “zonas de incertidumbre”, de forma que si el estadístico DW se encuentra entre d_L y d_U , o entre $4-d_U$ y $4-d_L$, no podremos concluir nada.
- Sólo es válido si todos los regresores del modelo son deterministas. Si, p.e., entre los regresores del modelo se incluyese la variable endógena retardada (como en el modelo $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \gamma_1 Y_{t-1} + u_t$), el test no sería válido (ya que el modelo incluiría un regresor con componente aleatoria proveniente del término de perturbación u_{t-1}).

Por los motivos anteriores, se ha desarrollado toda una serie de tests complementarios al de Durbin-Watson, los cuales pueden emplearse para solucionar algunas de sus limitaciones. Entre ellos cabe citar los siguientes: el test de la h de Durbin, el test de Breusch-Godfrey, el test Q de Box-Pierce, etc.

Ejemplo: Volviendo al ejemplo anterior, vamos a comprobar ahora –mediante el test de Durbin-Watson- si la autocorrelación que habíamos detectado al analizar el gráfico de los residuos es del tipo AR(1).

El primer paso será estimar el modelo mediante MCO, indicando al programa que deseamos conocer también el valor del estadístico DW:



El “output” que obtenemos es el siguiente:

Regression Analysis				
The regression equation is				
IM = - 56,1 + 0,126 PIB				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	-56,133	5,440	-10,32	0,000
PIB	0,126230	0,004365	28,92	0,000
S = 10,61		R-Sq = 97,9%		R-Sq(adj) = 97,8%
Durbin-Watson statistic = 0,65				

Minitab nos ha proporcionado el valor DW = 0,65.

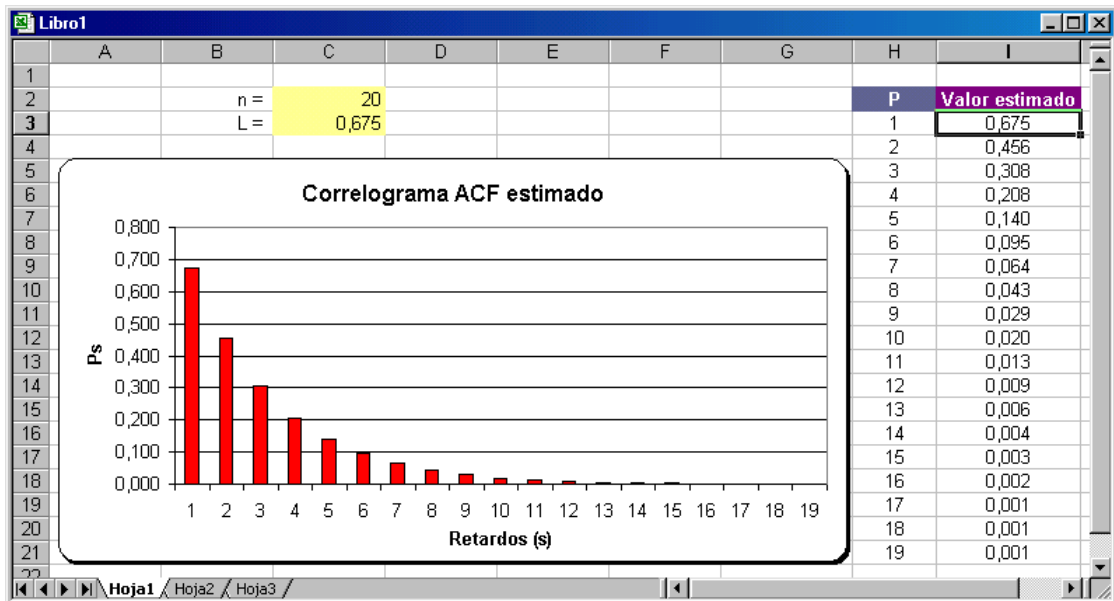
Para un nivel de significación $\alpha = 0,05$, y dado que $n = 20$ y $k = 1$, se obtienen los valores (ver tablas en enlaces web): $d_L = 1,20$ y $d_U = 1,41$.

Así pues, tendremos que $DW = 0,65 < d_L = 1,20$, por lo que rechazaremos la hipótesis nula, i.e.: hay indicios de que existe autocorrelación de tipo AR(1) en el término de perturbación. Además, estamos en el caso en que $\phi > 0$.

A partir del estadístico DW, podemos estimar el valor del primer coeficiente de autocorrelación simple:

$$\hat{\rho}_1 \cong 1 - \frac{DW}{2} = 0,675$$

Como en un modelo con autocorrelación AR(1), los coeficientes de autocorrelación simple vienen dados por: $p_1 = \phi$, $p_2 = \phi^2$, ..., $p_s = \phi^s$, también podremos obtener estimaciones para los (n-1) coeficientes y representar la correspondiente función de autocorrelación simple o ACF:



Finalmente, una estimación de la matriz Ω^{-1} (de tamaño 20x20) vendrá dada por:

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1 - 0,675^2} \begin{bmatrix} 1 & -0,675 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -0,675 & 1 + 0,675^2 & -0,675 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -0,675 & 1 + 0,675^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + 0,675^2 & -0,675 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -0,675 & 1 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz Ω^{-1} sería posible –al menos en teoría, ya que cuando el número de observaciones es muy grande los cálculos con matrices se complican- aplicar MCG para obtener los coeficientes del vector **B**.

□ **Estimación de modelos con autocorrelación AR(1) por método de Durbin**

Como acabamos de ver, dado un MRLM cuyo término de perturbación presente autocorrelación de tipo AR(1), es posible estimar el parámetro ϕ a partir del estadístico DW y, por tanto, construir la matriz Ω^{-1} (o, alternativamente, T) con la cual aplicar el método MCG para estimar los coeficientes del modelo inicial.

En ocasiones, sin embargo, puede resultar más eficiente estimar el vector de coeficientes **B** utilizando una variante del método MCG que se denomina **método de Durbin**. Así, dado el MRLM:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot X_{2t} + \dots + \beta_k \cdot X_{kt} + u \quad \text{con} \quad u_t = \phi \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$$

haremos lo siguiente:

1. Estimar por MCO el coeficiente ϕ del modelo auxiliar:

$$Y_t = \alpha_1 + \phi \cdot Y_{t-1} + \alpha_{21} \cdot X_{2t} + \alpha_{22} \cdot X_{2t-1} \dots + \alpha_{k1} \cdot X_{kt} + \alpha_{k2} \cdot X_{kt-1} + \varepsilon_t$$

2. Usando el estimador de ϕ obtenido, aplicar MCO en el modelo transformado siguiente:

$$\underbrace{(Y_t - \hat{\phi} \cdot Y_{t-1})}_{Y_t^*} = \underbrace{(1 - \hat{\phi})\beta_1}_{\beta_1^*} + \underbrace{\beta_2(X_{2t} - \hat{\phi} \cdot X_{2t-1})}_{X_{2t}^*} + \dots + \underbrace{\beta_k(X_{kt} - \hat{\phi} \cdot X_{kt-1})}_{X_{kt}^*} + \underbrace{(u_t - \hat{\phi} \cdot u_{t-1})}_{u_t^*}$$

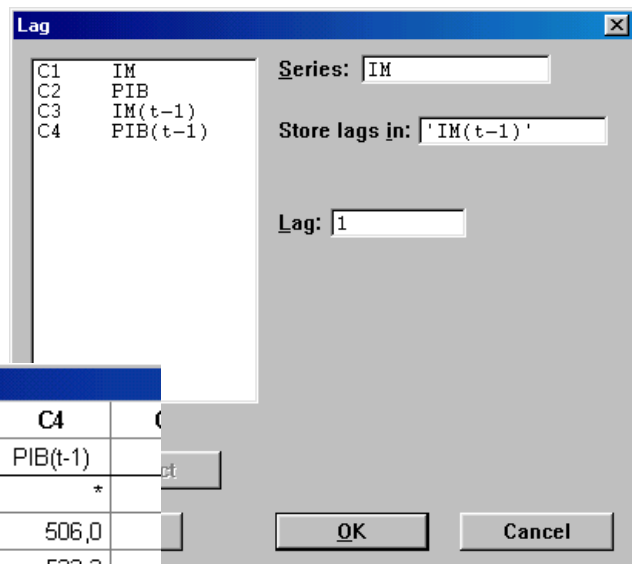
Para evitar perder las primeras observaciones, antes de aplicar MCO al modelo transformado definiremos $Y_1^* = Y_1 \cdot \sqrt{1 - \hat{\phi}^2}$, y $X_{i1}^* = X_{i1} \cdot \sqrt{1 - \hat{\phi}^2} \quad \forall i = 2, \dots, k$.

Ejemplo: Continuando con el ejemplo anterior, habíamos demostrado que el modelo original $IM_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot PIB_t + u_t$ presentaba autocorrelación de tipo AR(1) en el término de perturbación.

El primer paso será pues estimar por MCO el modelo auxiliar:

$$IM_t = \alpha_1 + \phi \cdot IM_{t-1} + \alpha_{21} \cdot PIB_t + \alpha_{22} \cdot PIB_{t-1} + \varepsilon_t$$

Para ello, hemos de construir las nuevas columnas IM(t-1) y PIB(t-1), las cuales contendrán los mismos datos que las columnas IM y PIB pero con un retardo de una unidad temporal. Para crear estas nuevas columnas, podemos usar la opción **Stat > Time Series > Lag...**:



Las nuevas columnas creadas se muestran en la siguiente imagen:

	C1	C2	C3	C4
	IM	PIB	IM(t-1)	PIB(t-1)
1	23,2	506,0	*	*
2	23,1	523,3	23,2	506,0
3	25,2	563,8	23,1	523,3
4	26,4	594,7	25,2	563,8
5	28,4	635,7	26,4	594,7
6	32,0	688,1	28,4	635,7
7	37,7	753,0	32,0	688,1
8	40,6	796,3	37,7	753,0

Del "output" obtenido sólo nos interesa el estimador del coeficiente ϕ , cuyo valor es 0,7215:

Regression Analysis				
The regression equation is $IM = -20,9 + 0,721 IM(t-1) + 0,154 PIB - 0,116 PIB(t-1)$				
19 cases used 1 cases contain missing values				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	-20,89	12,21	-1,71	0,108
IM(t-1)	0,7215	0,2014	3,58	0,003
PIB	0,1538	0,1131	1,36	0,194
PIB(t-1)	-0,1164	0,1301	-0,89	0,385

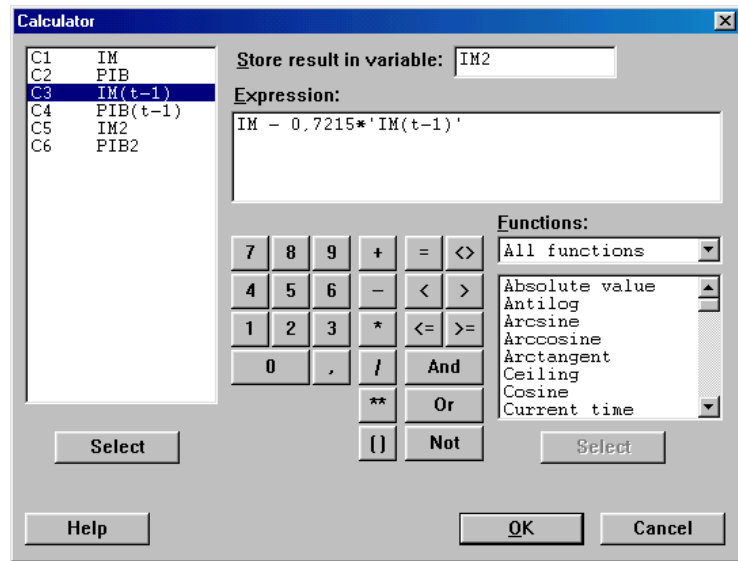
Usaremos este valor para construir el modelo transformado:

$$(IM_t - 0,7215 \cdot IM_{t-1}) = (1 - 0,7215)\beta_1 + \beta_2(PIB_t - 0,7215 \cdot PIB_{t-1}) + (u_t - 0,7215 \cdot u_{t-1})$$

Crearemos pues las nuevas variables $IM_t^* = IM_t - 0,7215 \cdot IM_{t-1}$, y $PIB_t^* = PIB_t - 0,7215 \cdot PIB_{t-1}$ (denotaremos las nuevas columnas por IM2 y PIB2 respectivamente):

Para las primeras celdas de las columnas IM2 y PIB2, usaremos respectivamente los valores:

- Celda 1 de IM2 = $23,2 \cdot \sqrt{(1-0,7215^2)}$ = 16,064
- Celda 1 de PIB2 = $506,0 \cdot \sqrt{(1-0,7215^2)}$ = 350,362



Las nuevas columnas quedarán pues de la siguiente manera:

Finalmente, el "output" de regresión nos proporciona los valores estimados para los coeficientes β_2 y $\beta_1^* = 0,2785 \cdot \beta_1$. Por tanto, podemos concluir que:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
↓	IM	PIB	IM(t-1)	PIB(t-1)	IM2	PIB2
1	23,2	506,0	*	*	16,064	350,362
2	23,1	523,3	23,2	506,0	6,361	158,221
3	25,2	563,8	23,1	523,3	8,533	186,239
4	26,4	594,7	25,2	563,8	8,218	187,918
5	28,4	635,7	26,4	594,7	9,352	206,624
6	32,0	688,1	28,4	635,7	11,509	229,442
7	37,7	753,0	32,0	688,1	14,612	256,536
8	40,6	796,3	37,7	753,0	13,399	253,010

$$\beta_2 = 0,142 \text{ y } \beta_1 = -22,346 / 0,2785 = -80,237.$$

Regression Analysis				
The regression equation is IM2 = - 22,3 + 0,142 PIB2				
Predictor	Coef	StDev	T	P
Constant	-22,346	3,912	-5,71	0,000
PIB2	0,141525	0,009000	15,72	0,000
S = 7,731		R-Sq = 93,2%		R-Sq(adj) = 92,8%
Durbin-Watson statistic = 2,58				

Se puede comprobar además que, para un nivel de significación $\alpha = 0,05$, el nuevo estadístico DW = 2,58 no muestra indicios de autocorrelación de tipo AR(1) en el término de perturbación del modelo transformado.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Artís, M.; Suriñach, J.; et al (2002): "Econometría". Ed. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya. Barcelona.
- [2] Carter, R.; Griffiths, W.; Judge, G. (2000): "Using Excel for Undergraduate Econometrics". ISBN: 0-471-41237-6
- [3] Doran, H. (1989): "Applied Regression Analysis in Econometrics". Ed. Marcel Dekker, Inc. ISBN: 0-8247-8049-3
- [4] Gujarati, D. (1997): "Econometría básica". McGraw-Hill. ISBN 958-600-585-2
- [5] Johnston, J. (2001): "Métodos de econometría". Ed. Vicens Vives. Barcelona. ISBN 84-316-6116-X
- [6] Kennedy, P. (1998): "A Guide to Econometrics". Ed. MIT Press. ISBN: 0262611406
- [7] Novales, A. (1993): "Econometría". McGraw-Hill. ISBN 84-481-0128-6
- [8] Pulido, A. (2001): "Modelos econométricos". Ed. Pirámide. Madrid. ISBN 84-368-1534-3
- [9] Uriel, E. (1990): "Econometría: el modelo lineal". Ed. AC. Madrid. ISBN 84-7288-150-4
- [10] Wooldridge, J. (2001): "Introducción a la Econometría: un enfoque moderno". Ed. Thomson Learning. ISBN: 970-686-054-1

ENLACES

- ❑ http://cv.uoc.es/moduls/UW01_71075_00231/index.html
Tablas de distribuciones estadísticas (incluye la del estadístico Durbin-Watson)
- ❑ <http://www.metu.edu.tr/~eruygur/econ302/probset/tables.pdf>
Tablas de distribuciones estadísticas (incluye la del estadístico Durbin-Watson)
- ❑ <http://www.feweb.vu.nl/econometriclinks/index.html>
The Econometrics Journal On-Line
- ❑ <http://www.elsevier.com/hes/books/02/menu02.htm>
Libro on-line: Handbook of Econometrics Vols. 1-5
- ❑ <http://elsa.berkeley.edu/users/mcfadden/discrete.html>
Libro on-line: Structural Analysis of Discrete Data and Econometric Applications
- ❑ http://www.oswego.edu/~kane/econometrics/stud_resources.htm
Online Resources for Econometric Students
- ❑ <http://www.econ.uiuc.edu/~morillo/links.html>
Econometric Sources: a collection of links in econometrics and computing. University of Illinois
- ❑ <http://www.econometrics.net/>
Econometrics, Statistics, Mathematics, and Forecasting
- ❑ <http://ideas.uqam.ca/EDIRC/ectrix.html>
Economics Departments, Institutes and Research Centers in the World: Econometrics, Mathematical Economics.